



RAPPORT ET MÉMOIRE

SUR

LES PONTS SUSPENDUS.


KAISERLICHE KOENIGLICHE
WIEN
HOFBIBLIOTHEK

RAPPORT

A Monsieur BECQUEY,

CONSEILLER D'ÉTAT,

DIRECTEUR GÉNÉRAL DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES;

ET

MÉMOIRE

SUR LES PONTS SUSPENDUS;

Par M. NAVIER,

INGÉNIEUR EN CHEF AU CORPS ROYAL DES PONTS ET CHAUSSÉES.



A PARIS,

DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

1823.

RAPPORT

A Monsieur BECQUEY,

CONSEILLER D'ÉTAT,

DIRECTEUR GÉNÉRAL DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES.

Monsieur le Directeur général,

Vous m'avez désigné pour aller en Angleterre recueillir des renseignemens sur la construction des ponts suspendus, en m'ordonnnant de vous faire connaître, dans un Rapport détaillé, les avantages et les inconvéniens que ce nouveau système me paraîtrait présenter. Je me suis efforcé de satisfaire aux intentions exprimées dans votre lettre, datée du 13 août 1821.

Ayant fait deux voyages en Angleterre, le premier dans les mois de septembre, octobre et novembre 1821, le second dans les mois de mars et avril 1823, j'ai visité les constructions en chaînes de fer les plus importantes, et je me suis livré à des recherches étendues sur ce genre de construction. La description des objets dont j'ai pris connaissance, et l'exposé de mes recherches, sont contenus dans le Mémoire joint à ce Rapport : je vais avoir l'honneur de vous en présenter les principaux résultats.

Il convient d'abord de fixer l'idée que l'on doit se former du genre de ponts dont il s'agit. L'expression de *ponts suspendus* ne le définit pas complétement ; car on a quelquefois appliqué cette expression à des ouvrages tels

que les grands ponts en charpente de la Suisse, où le plancher est placé au-dessous des arcs en bois par lesquels il est supporté. Mais dans ces derniers ponts, les arcs sont rigides, la convexité de ces arcs est tournée en haut, et les pièces y sont comprimées dans le sens de la longueur. Dans les ponts suspendus qui sont l'objet de ce Rapport, le plancher est supporté par des arcs flexibles, dont la convexité est tournée en bas, et dont les pièces sont tendues dans le sens de la longueur.

La première idée des ponts suspendus existe dans les ponts de cordes construits par les habitans de quelques contrées de l'Amérique méridionale. Ce genre de construction était très-propre à franchir les vallées profondes des Cordillières. On le retrouve, employé dans des localités semblables, aux grandes Indes et en Chine; mais les cordes y sont souvent remplacées par des chaînes en fer. Ces ouvrages grossiers offrent aux hommes, et quelquefois aux bêtes de somme, un passage incommode et dangereux.

Pour appliquer cette idée à la construction des ponts destinés au passage des voitures, il fallait soutenir un plancher droit et horizontal, au moyen de chaînes courbes et flexibles; et il était nécessaire de proportionnner tellement l'étendue de la construction, la courbure des chaînes, la résistance et le poids des matériaux, que ce plancher ne cédât pas sensiblement sous la charge des voitures, et ne fût pas moins fixe que celui des ponts en charpente ordinaires. M. Finley, propriétaire dans les États-Unis de l'Amérique septentrionale, paraît avoir réussi le premier, il y a vingt-sept ans, dans cette entreprise. Dans les ponts construits sous sa direction, les chaînes sont soutenues par des poteaux placés sur les rives, et le plancher est suspendu au-dessous de ces chaînes par des tiges verticales. Un très-grand nombre de ponts établis d'après ce système, et disposés de diverses manières, ont été construits dans les États-Unis. La plus grande ouverture des arches, dans ceux dont nous avons connaissance, est de 74 mètres.

Un ingénieur appartenant au corps des ponts et chaussées de France, M. Bélu, présenta en 1807 le projet d'une arche supendue de 250 mètres d'ouverture, destinée à franchir l'un des bras du Rhin, entre Wesel et Ruderich. Cet ingénieur n'avait aucune connaissance des ouvrages existans en Amérique, et il ne paraît pas avoir eu l'idée de placer le plancher du pont au-dessous des chaînes. Dans son projet, les chaînes étaient au contraire placées au-dessous du plancher: on ne pouvait leur donner qu'une très-faible courbure, et elles se

trouvaient exposées à une tension très-considérable. Cette construction, quoique plus coûteuse que ne le croyait l'auteur, aurait cependant pu être exécutée : il est très-vraisemblable qu'elle aurait réussi, et l'on doit regretter que les idées présentées à cette époque par M. Bélu n'aient point été accueillies.

L'application du principe de la suspension à la construction des ponts paraît avoir excité, depuis une dixaine d'années environ, l'attention des ingénieurs anglais. M. Telford a donné en 1813 le projet d'un très-grand pont de ce genre, qui doit être construit sur la Mersey, dans les environs de Liverpool. Ce pont offre une arche de 305 mètres d'ouverture, accompagnée de deux demi-arches de 152 mètres d'ouverture chacune; le plancher est élevé de 21 mètres au-dessus du niveau des hautes eaux. On n'en a pas encore commencé l'exécution.

Depuis ce temps jusqu'à l'année 1819, on a construit en Angleterre et en Écosse plusieurs ponts suspendus peu importans, et destinés seulement au passage des personnes à pied : le plus remarquable a 79 mètres d'ouverture. Le plancher est soutenu, dans la plupart de ces ouvrages, par des tiges inclinées qui sont fixées à l'extrémité supérieure des poteaux placés sur les rives et viennent s'attacher à divers points de ce plancher. Un des ponts construits de cette manière a souffert plusieurs accidens, et enfin a été détruit par un coup de vent. Cet exemple n'est pas favorable à ce genre de construction, que M. Poyet, architecte, avait proposé depuis long-temps.

M. Telford a présenté en 1818 un autre projet, pour la construction d'un pont suspendu sur le bras de mer qui sépare l'île d'Anglesea de l'Angleterre. La longueur du plancher, élevé de 30 mètres au-dessus des hautes marées, est de 152 mètres, et la distance entre les points de suspension des chaînes est de 171 mètres. L'examen de ce projet, par les commissaires de la chambre des communes chargés de la direction des travaux de la route de Londres à Holyhead, a donné lieu à une enquête intéressante, dont les résultats ont fixé les idées sur la résistance du fer, éprouvée par beaucoup d'expériences faites en grand, et sur la force qu'il convenait de donner aux chaînes. Les ingénieurs consultés par les commissaires n'ont élevé aucun doute sur le succès des constructions de ce genre : tous se sont accordés à affirmer que les ponts suspendus pourraient être fréquentés sans danger et sans incommodité par les voitures. M. Rennie a déclaré qu'il regardait l'introduction de ces nouveaux ponts comme étant très-avantageuse à l'état. L'exécution du projet de M. Telford a été commencée en 1820, et doit être achevée en 1824.

Le capitaine Brown, propriétaire d'établissemens où l'on fabrique des câbles en fer pour l'usage de la marine, a construit en Angleterre le premier pont suspendu destiné à donner passage aux voitures. Cet ouvrage a été livré au public le 26 juillet 1820. Il est situé sur le Tweed, près du port de Berwick. La longueur du plancher est de 110 mètres, et la distance des points de suspension des chaînes de 132 mètres; la largeur du plancher est de 5 mètres $\frac{1}{2}$. Depuis l'ouverture de ce pont, le passage y est demeuré constamment libre, et la construction n'a été nullement altérée. Le plancher cède un peu sous la charge des voitures pesantes, et l'élasticité du fer donne lieu à des vibrations sensibles; mais il ne résulte aucun inconvénient de ces effets, dont les édifices les plus massifs, et les ponts de pierre même, ne sont pas entièrement exempts. L'expérience du pont érigé sur le Tweed, dont la construction est très-légère, montre avec certitude que les ponts suspendus, malgré la flexibilité des chaînes et du plancher, peuvent être suffisamment fixes, et que le passage y est aussi sûr et aussi commode que sur les autres ponts. Il n'existe dans celui-ci aucun balancement horizontal, le plancher offrant dans ce sens une résistance suffisante, quoiqu'on n'y ait point employé de pièces dirigées diagonalement.

Les chaînes de fer ont été également appliquées, par le capitaine Brown, à la construction d'un embarcadère, sur le golfe du Forth, près d'Edinburgh. Cet ouvrage consiste dans trois arches de 64 mètres d'ouverture chacune, formant une communication, pour les personnes à pied, entre le rivage et une plate-forme établie en mer sur un pilotis. Il a été construit dans l'été de 1821. Le même ingénieur établit actuellement à Brighton un embarcadère semblable, mais dont les dimensions sont plus grandes.

J'ai inséré dans le Mémoire ci-joint la traduction d'une lettre du capitaine Brown, dans laquelle il paraît attacher beaucoup d'importance à cette application des chaînes à la construction des embarcadères. Il regarde ces ouvrages comme donnant les moyens de faciliter et d'abréger le débarquement et l'embarquement des troupes et des marchandises à bord des bâtimens, et, dans certains cas, de porter des secours assurés aux vaisseaux menacés par la tempête. Ces vues paraissent mériter l'attention des ingénieurs chargés de la direction des travaux maritimes.

Les derniers ponts suspendus exécutés en Angleterre ont été construits par M. Brunel, ingénieur civil, membre de la société royale, et doivent être transportés à l'île de Bourbon: l'un est composé de deux demi-arches, et l'autre d'une

seule arche, de 37 mètres d'ouverture. Ces ponts donneront passage à des voitures légères. On remarque dans le premier l'emploi d'un support placé au milieu de la rivière, disposition qui peut être adoptée dans quelques cas avec avantage ; et dans tous les deux, l'usage de chaînes inférieures renversées, destinées à maintenir le plancher contre l'action des vents.

Les descriptions contenues dans mon Mémoire, et les dessins dont elles sont accompagnées, font connaître les constructions que je viens d'indiquer : j'ai taché qu'elles ne laissassent à desirer aucun détail aux personnes qui voudraient projeter des constructions semblables. Je dois maintenant, monsieur le Directeur général, avoir l'honneur de vous exposer les idées que je me suis formées sur ce nouveau genre de ponts, et les recherches que j'ai faites pour en étudier les propriétés.

Le fer forgé, tiré dans le sens de la longueur, est employé dans toutes nos constructions, dont il offre le principal et presque le seul moyen de liaison. La plupart des planchers formant le plafond des salles de spectacle sont suspendus par des étriers en fer à la charpente des combles. On place beaucoup de fer dans l'intérieur des voûtes et des plates-bandes en pierre, pour les consolider. Les architectes italiens ne cherchent même pas, dans les édifices les plus magnifiques, à dissimuler l'emploi de ces armatures. La nef de la cathédrale de Milan, appelée *il Duomo,* entièrement construite en marbre blanc, est traversée par des tirans de fer forgé. On sait que le dôme de Saint-Pierre de Rome, comme ceux de plusieurs autres églises d'Italie, est ceint par des cercles de fer : l'usage de ces cercles a fourni un moyen également simple et économique pour consolider cette grande voûte, qui menaçait ruine, et dont la restauration eût été très-difficile par tout autre procédé.

Ces exemples ne pouvaient laisser aucun doute sur la possibilité de soutenir un pont par des chaînes, en donnant aux anneaux une grosseur suffisante ; et il était aisé de prévoir qu'en employant plusieurs chaînes, indépendantes les unes des autres, dont la rupture simultanée ne pourrait être regardée comme possible, on se trouverait à l'abri de tout danger provenant de la fracture accidentelle de quelque pièce. Mais, avant de l'avoir éprouvé par l'expérience, ou examiné par le calcul, on pouvait douter qu'un édifice de ce genre eût assez de fixité et de rigidité pour donner un passage commode aux voitures les plus pesantes. On pouvait craindre aussi des balancemens horizontaux produits par les secousses des voitures, ou par l'action du vent. Il était difficile, enfin, d'apprécier exactement d'avance la nature

et l'étendue des oscillations et des vibrations qui devaient se manifester dans des constructions flexibles et principalement composées d'une matière aussi élastique que l'est le fer forgé.

L'expérience des ponts exécutés dans les États-Unis de l'Amérique septentrionale et en Angleterre a prononcé sur ces objets. Il est actuellement constaté que ces édifices, dans les proportions adoptées pour le pont construit sur le Tweed par le capitaine Brown, n'ont pas de balancemens horizontaux; que le plancher est aussi ferme que l'on puisse le desirer, et que les vibrations dues à l'élasticité de la matière, quoique plus sensibles que dans les ponts ordinaires en bois et en fer fondu, ne sont pas assez grandes pour rendre le passage incommode. Le succès des édifices de ce genre paraît donc assuré, pourvu que l'on donne aux chaînes une force convenable.

Pour que les chaînes aient assez de force, deux conditions doivent être remplies : il faut employer une quantité de fer suffisante, et ce fer doit être bien fabriqué et sans défauts. Il est facile de satisfaire avec certitude à ces deux conditions, puisqu'on peut toujours connaître d'avance, par des calculs très-simples, les efforts auxquels les chaînes seront exposées, et régler en conséquence les dimensions des fers; et puisqu'on peut s'assurer, avant l'emploi, de la bonne exécution des pièces, en les soumettant à des efforts surpassant les plus grandes tensions que ces pièces puissent avoir à soutenir.

Au moyen de ces précautions, on ne doit concevoir aucune inquiétude sur la solidité des ouvrages de ce genre, à moins qu'on ne suppose que la qualité des fers doit changer avec le temps. La plupart des matières employées dans nos constructions sont susceptibles de s'altérer, et le fer fondu ou forgé paraît être une de celles dont la conservation est le mieux assurée. On peut prévenir l'effet de l'action chimique de l'air atmosphérique chargé d'humidité en peignant à l'huile la surface des fers, comme on le fait ordinairement. Les variations de la température ne peuvent ici causer des ruptures, comme elles en causent quelquefois dans les cordes métalliques des instrumens de musique : en effet, les fers supportent, dans les ponts, des tensions bien moins considérables; et d'ailleurs ces ruptures ont lieu par suite des différences qui existent entre la dilatation et les autres propriétés physiques des divers corps dont les instrumens sont formés, et d'après lesquelles le degré de tension des cordes change nécessairement avec la température et avec l'état hygrométrique de l'atmosphère. Dans les chaînes des ponts suspendus, au contraire, les efforts auxquels les fers

sont exposés ne varient pas d'une manière sensible lorsque les fers s'accourcissent ou s'allongent par l'effet du froid ou de la chaleur; car ces efforts dépendent uniquement du poids de la construction, qui demeure toujours le même, et de la courbure des chaînes, qui ne change pas sensiblement. L'effet du refroidissement sur les fers employés en tirans ou en ceintures, dans les constructions en maçonnerie, semble bien plus dangereux.

Quelques personnes paraissent disposées à craindre que la constitution physique des fers ne soit altérée avec le temps, par suite des mouvemens de vibration presque continuels auxquels donnera lieu le passage des voitures. Les effets produits par les mouvemens intérieurs de vibration des molécules des corps sont peu connus. On observe quelquefois que des pièces d'acier employées dans la construction des horloges et des montres, ou formant des ressorts de voitures, se rompent après un certain temps, et ces ruptures ont ordinairement lieu près des extrémités fixes des pièces. Les accidens de ce genre sont assez rares, et dépendent de causes qui n'ont point été suffisamment étudiées. L'expérience seule peut nous apprendre si les secousses auxquelles les chaînes des ponts suspendus se trouvent exposées, sont capables de produire, dans les parties de ces chaînes, des effets semblables. Nous remarquerons seulement que les fers employés dans ces ponts (et cette remarque s'applique sur-tout aux chaînes, qui forment la partie la plus importante de la construction), quant à l'étendue et à la rapidité des vibrations, sont placés dans des circonstances bien moins défavorables que ne le sont les pièces sur lesquelles ces effets ont été observés. On doit remarquer aussi que le fer forgé présente à cet égard des qualités fort différentes de celles du fer ou de l'acier fondu : ces matières, par les circonstances mêmes de l'opération de la fonte, sont presque toujours plus ou moins cassantes, et, dans une construction où elles seraient tendues, ne pourraient être exposées à des secousses avec sécurité.

Dans la plupart des ponts construits en bois ou en fer, on a soin de disposer les pièces principales de manière que l'on puisse enlever et remplacer celles qui viendraient à s'altérer. Mais il faut convenir que, dans les ponts ordinaires, cette opération serait très-difficile. On n'a jamais entrepris, à ma connaissance, et l'on n'entreprendrait pas sans danger, de remplacer un voussoir dans une des fermes d'un pont en fer fondu, à moins d'étayer entièrement cette ferme. Dans les ponts suspendus, au contraire, le remplacement d'un anneau défectueux dans une chaîne n'offre aucune difficulté et ne peut entraîner aucun accident.

La nature de la construction est telle, que l'on peut, au moyen d'appareils très-simples, sans étayer le pont, et presque sans interrompre le passage, élever le plancher, accourcir les chaînes, si elles s'étaient allongées par quelque cause que ce fût, et remplacer en partie ou en totalité les anneaux dont ces chaînes sont formées. Ainsi, en supposant même que les fers viendront à s'altérer avec le temps (ce qui ne me paraît pas vraisemblable), la durée des ouvrages de ce genre peut être prolongée autant qu'on le voudra, au moyen de réparations faciles et peu coûteuses.

La construction d'un pont en maçonnerie exige que des masses énormes soient extraites de la terre, transportées péniblement, et entassées, non sans difficulté et sans danger, sur la rivière qu'il s'agit de traverser. Ces ponts ont quelquefois été décorés avec élégance, et un long usage nous a rendu familières les opérations nécessaires pour les construire. On doit reconnaître toutefois que les ponts suspendus à des chaînes appartiennent à une industrie plus parfaite. En effet, lorsqu'il s'agit d'établir sur une rivière une communication, l'art consiste évidemment à faire le moins de dépense et à employer le moins de matière qu'il est possible. Les constructions en chaînes de fer satisfont bien mieux à ces conditions que les constructions en maçonnerie; elles coûteront toujours beaucoup moins, et seront incomparablement plus légères. Nous pouvons remarquer aussi que la dépense causée par un pont en pierre est ordinairement employée en très-grande partie à payer des chevaux de transport, et des ouvriers qui exercent une industrie grossière et gagnent trop peu pour vivre avec aisance. La même dépense, appliquée aux ponts suspendus à des chaînes, servira à développer une industrie plus relevée, qu'il est de l'intérêt de l'état d'encourager, et à faire vivre des ouvriers plus habiles.

La propriété caractéristique de ces ponts consiste en ce qu'ils forment un système flexible, dans lequel l'équilibre est stable : c'est-à-dire qu'il peuvent se prêter, sans qu'aucune pièce soit exposée à rompre, à tous les changemens de figure que des causes quelconques tendraient à produire, et qu'après ces changemens, la construction, abandonnée à elle-même, reprend spontanément la figure qui lui avait été donnée. Les ponts ordinaires n'offrent pas la même propriété : s'il y survenait un changement de figure, ce changement ne disparaîtrait pas par l'effet seul des forces auxquelles la construction est soumise. On est par conséquent obligé de rendre les arcs qui supportent ces ponts capables de résister à la flexion, afin que le plancher ne cède point au poids des voitures,

et de lier ces arcs entre eux, pour qu'ils ne se renversent point sur le côté. La force qu'il est nécessaire de donner aux arcs et aux pièces qui les assujettissent, augmente plus rapidement que l'ouverture des arches, et par conséquent cette ouverture ne peut être très-considérable. Les ponts suspendus, au contraire, paraissent éminemment propres à franchir sans points d'appui intermédiaires les plus grands espaces; et l'ingénieur qui a construit en Angleterre le premier pont de ce genre destiné au passage des voitures, n'a point hésité à lui donner une étendue qui dépasse beaucoup celle des arches les plus hardies qui aient été faites en fer fondu. On reconnaît effectivement, d'après la manière dont la force des chaînes doit être proportionnée à l'ouverture des arches, que les limites de cette ouverture, dans les ponts suspendus, sont très-étendues, pourvu que l'on soit le maître d'élever suffisamment les points d'attache des chaînes. On pourrait facilement construire une arche de 500 mètres, avec des supports de 30 mètres de hauteur; et cet édifice, du succès duquel il n'est aucune raison de douter, ne causerait pas une dépense fort considérable.

Une autre propriété particulière aux ponts suspendus est la facilité avec laquelle on les mettrait en place sans construire de cintre ou d'échafaud. En effet, on peut soulever et fixer successivement les chaînes par lesquelles le pont sera soutenu, puis suspendre à ces chaînes des échafauds volans, au moyen desquels on en réglera les longueurs et on attachera les tiges de suspension et le plancher. Cette propriété sera précieuse dans beaucoup de circonstances. Il serait très-difficile, et presque impossible, avec les moyens ordinaires, dans le cas où l'ouverture dépasserait 150 ou 200 mètres, de franchir un vallon très-escarpé et très-profond, ou un bras de mer agité par les vents : la construction d'un pont suspendu, dans des cas semblables, ne trouverait au contraire aucun obstacle.

Le principal élément de l'établissement de ces ponts consiste dans la connaissance de la figure affectée par les chaînes, et des efforts qui s'exercent dans toutes les parties de la construction. La courbe qui convient à l'équilibre des chaînes n'est point ici celle qu'on désigne ordinairement sous le nom de *chaînette* ou *catenaire*, et qui répond au cas où la charge supportée est distribuée uniformément sur la longueur de la courbe. En effet, la plus grande partie de la charge, dans les ponts suspendus, est distribuée uniformément sur la ligne droite tracée entre les deux extrémités de la courbe; et comme la figure qui conviendrait à l'équilibre, si la charge était distribuée entièrement de cette manière, est la parabole ordinaire, la ligne décrite par les chaînes s'approche beaucoup plus de

cette dernière courbe que de toute autre. La simplicité de l'expression analytique des propriétés de la parabole offre les plus grandes facilités pour toutes les recherches et tous les calculs auxquels peuvent donner lieu l'établissement des constructions dont il s'agit. Le résultat le plus général est que la tension des chaînes est proportionnelle à l'ouverture des arches, en supposant constante la charge sur l'unité de longueur du plancher, et les figures de ces arches semblables. Si les figures des arches ne sont point semblables, la tension est en raison directe du carré de l'ouverture et en raison inverse de la flèche de la courbe.

Quand on a déterminé la figure qui convient à l'état d'équilibre ordinaire des chaînes, la première question qui se présente est la recherche des changemens qui peuvent survenir dans cette figure par l'effet du passage des voitures. On trouvera dans le Mémoire ci-joint les moyens de connaître ces changemens dans tous les cas qui peuvent se présenter. Cette recherche conduit à un résultat très-remarquable, qui consiste en ce qu'un même poids, placé au milieu du plancher, dans divers arches de figures semblables et de grandeurs différentes, produit toujours des abaissemens égaux, si la charge correspondante à l'unité de longueur de la construction est la même. Cette proposition est également vraie, en regardant les chaînes comme des fils inextensibles, ou en ayant égard à l'extensibilité du fer. On n'a donc point à craindre, en augmentant l'ouverture des arches, de rendre les planchers plus flexibles. Les planchers seront au contraire d'autant plus fermes, que l'étendue des arches sera plus considérable; parce qu'une arche plus grande exige des chaînes plus pesantes, et par conséquent une charge plus forte sur l'unité de longueur de la construction.

Pour déterminer la quantité de fer qui doit être employée dans les chaînes, il faut, à la connaissance des tensions auxquelles ces chaînes sont soumises, réunir celles des efforts que le fer peut supporter sans altération. Les expériences connues apprennent que l'effort nécessaire pour rompre une barre de fer, tirée dans le sens de la longueur, est d'environ 40 kilogrammes pour chaque millimètre carré de la section transversale de la barre; ce résultat est sur-tout fondé sur des expériences en grand faites en Angleterre, et dont il m'a paru nécessaire d'insérer le détail à la suite du Mémoire. Les expériences indiquent d'ailleurs que plusieurs qualités de fer peuvent s'étendre considérablement avant de rompre, et commencent, en général, à s'étendre sous des poids qui dépassent un peu la moitié de la charge qui causerait la rupture. Une semblable extension est une véritable altération dans la constitution physique du fer, et l'on ne doit point

exposer les pièces à des efforts capables de la produire. Je pense, d'après divers rapprochemens, que l'on n'aura rien à craindre à cet égard, en déterminant la grosseur des chaînes de manière que les plus grandes tensions auxquelles elles soient exposées, dans le cas où le pont serait chargé de voitures ou de personnes à pied, ne dépassent point le tiers environ de la tension qui en opérerait la rupture. Cette règle s'accorde avec les dimensions adoptées dans les ponts construits ou projetés en Angleterre, et paraît devoir être admise, en attendant que l'expérience ait apporté plus de lumières sur ce sujet.

Les expériences faites sur l'élasticité du fer, que l'on doit principalement à M. Duleau, ingénieur des ponts et chaussées, font d'ailleurs connaître les légers allongemens que subissent nécessairement les pièces tendues, et qui n'entraînent aucune altération dans la constitution physique de ces pièces. J'ai donné les formules nécessaires pour apprécier les effets de ces allongemens, ainsi que les altérations qui résultent des changemens de la température. Il était sur-tout essentiel d'examiner les effets de ce genre, relativement à l'état d'équilibre des supports sur lesquels les chaînes reposent; car l'allongement des chaînes auxquelles le plancher est suspendu, occasionne seulement un léger abaissement de ce plancher, dont il ne peut résulter aucun inconvénient, tandis que l'allongement des chaînes qui se dirigent de l'extrémité supérieure des supports vers la terre, peut quelquefois causer, dans ces supports, des mouvemens dangereux.

On sait que le bois offre une très-grande résistance aux efforts exercés dans le sens de la longueur des pièces : l'idée d'employer cette matière à la construction des chaînes des ponts suspendus se présentait naturellement. Des chaînes en bois seraient aussi légères et beaucoup moins coûteuses que les chaînes en fer; mais, dans les ponts construits de cette manière, les oscillations verticales, dues à l'élasticité des matériaux, auraient plus d'étendue. Il serait à desirer que l'on fît l'essai de ce nouveau genre de construction, qui serait sans doute plus économique, et probablement plus durable, que tous les autres systèmes de charpente qui sont actuellement en usage.

Le plancher des ponts suspendus peut être soutenu par des chaînes; il peut l'être aussi par des tiges inclinées, attachées à l'extrémité supérieure des supports, comme l'a proposé M. Poyet, et comme on l'a fait en Écosse, pour quelques ponts destinés aux personnes à pied; enfin, ce qui me paraîtrait préférable, on pourrait soutenir ce plancher par des tiges inclinées, dirigées parallèlement les unes aux autres. Chacun de ces systèmes offre des qualités différentes, d'après

lesquelles le choix que l'on ferait entre eux doit être déterminé. En comparant, dans ces diverses dispositions, les quantités de fer que chacune exigerait pour supporter en équilibre une charge donnée, répartie uniformément sur la longueur du plancher, on trouve d'ailleurs que ces quantités sont sensiblement égales entre elles, et que la différence très-petite qu'elles présentent est en faveur de l'emploi des chaînes. Ce rapprochement ne laisse aucun doute sur la préférence à donner, dans les constructions importantes, à ce dernier système, qui présente bien plus de sécurité, et dont le succès est constaté par l'expérience.

Les résultats précédens sont fondés sur la considération de la construction supposée en équilibre, et l'on ne peut douter qu'ils ne s'accordent exactement avec l'expérience. Les résultats relatifs aux mouvemens que le passage des voitures peut imprimer à cette construction, dont il me reste à parler, ont un caractère différent. La plupart des questions relatives aux mouvemens des corps sont trop compliquées pour que le calcul en puisse embrasser tous les élémens; les recherches de ce genre exigent un art particulier, qui consiste à remplacer les questions mêmes que l'on aurait à résoudre, par d'autres questions qui en diffèrent aussi peu qu'il est possible, et auxquelles le calcul peut être appliqué. A mesure que l'analyse mathématique se perfectionne, on résout des questions de plus en plus approchées des phénomènes qu'il s'agit d'étudier : si les solutions ne donnent pas des résultats entièrement conformes aux effets naturels, elles jettent au moins beaucoup de lumières sur les lois de ces effets. Cet art a été mis en usage de tout temps; mais souvent on n'a pas fait assez d'attention à la différence qui existait entre les phénomènes et les hypothèses que l'on soumettait à l'analyse, et l'on a accordé aux résultats du calcul trop de confiance et trop d'autorité. Les erreurs de ce genre ont donné lieu à cette allégation si commune, que la théorie ne s'accorde point avec la pratique ; opinion très-fausse, et qui ne peut trouver accès dans un corps aussi éclairé que l'est celui des ingénieurs des ponts et chaussées.

Dans la plupart des recherches relatives aux constructions, la résolution de ces questions simples, dont je viens de parler, offre un avantage particulier, qui consiste en ce que les résultats des solutions répondent ordinairement à des limites que les effets naturels ne peuvent dépasser; et que la connaissance de ces limites suffit presque toujours au constructeur. Si, par exemple, on détermine les oscillations des chaînes dans les ponts suspendus, en supposant la construction parfaitement flexible, il est évident que l'étendue des oscillations indiquée par le calcul surpassera l'étendue que ces oscillations présenteront effectivement. On voit aussi qu'il

n'est pas nécessaire, pour faire l'établissement d'un pont, de connaître la valeur exacte de cette étendue, et qu'il suffit de savoir qu'elle ne pourra dépasser une certaine limite.

Ces idées m'ont dirigé dans la recherche des lois des mouvemens produits par les secousses des voitures. Il m'a paru qu'on pouvait distinguer, dans ces mouvemens, des oscillations ou ondulations provenant de la flexibilité des chaînes, dans lesquelles les points s'élèvent et s'abaissent alternativement au-dessus et au-dessous des situations qu'ils occupent dans l'état d'équilibre de la construction, et des vibrations provenant de l'élasticité du fer, dans lesquelles les parties des chaînes s'allongent et s'accourcissent alternativement. Ces divers mouvemens sont, dans la nature, mêlés et confondus les uns avec les autres ; mais le calcul peut les séparer, et déterminer à part les lois différentes auxquelles ils sont assujettis. Pour y parvenir, j'ai considéré d'abord un fil parfaitement flexible et inextensible, attaché à deux points fixes, chargé de poids dans toute la longueur, et au milieu duquel un autre poids était placé ; j'ai déterminé les oscillations résultant d'un mouvement vertical imprimé à ce dernier poids. J'ai considéré ensuite un fil semblable, en le supposant toujours parfaitement flexible, mais élastique dans le sens de la longueur, et j'ai déterminé les vibrations longitudinales qui seraient également produites si l'on imprimait une vîtesse verticale au poids placé au milieu du fil. Les résultats de ces solutions feraient connaître, d'une manière très-approchée, les effets des secousses imprimées par une voiture en mouvement placée au milieu d'un pont, si l'on pouvait juger exactement, d'après la vîtesse de cette voiture, ou d'après la hauteur des obstacles que les roues ont franchis et dont elles retombent sur le plancher, de la vîtesse imprimée aux points voisins des chaînes. Comme ces mouvemens se transmettent par l'intermédiaire du plancher et des tiges de suspension, ils ne parviennent aux chaînes que fort affaiblis, et par conséquent on trouverait des résultats beaucoup trop considérables, en introduisant dans le calcul la vîtesse même avec laquelle la voiture frappe le plancher : mais la solution, appliquée de cette manière, donne au moins une limite, au-dessous de laquelle les effets naturels demeureront nécessairement compris.

Il se présente ici une remarque essentielle. Les solutions semblables aux précédentes peuvent être employées de deux manières, soit à déterminer les valeurs absolues des quantités cherchées, soit à connaître les rapports que ces quantités doivent présenter entre elles dans divers cas. Les erreurs qu'on pour-

rait commettre en regardant les résultats de ces solutions comme conformes aux effets naturels, sont bien moins grandes quand on les emploie de la seconde manière. En supposant donc que l'on ait observé les effets des secousses dans une construction exécutée, par exemple, au pont construit sur le Tweed par le capitaine Brown, je crois que l'on peut se servir avec beaucoup d'avantage des solutions dont il s'agit, pour juger de l'étendue de ces effets dans toute autre construction du même genre. En adoptant ce principe, je regarde comme différant très-peu de la vérité les résultats suivans, auxquels on se trouve conduit par ces solutions.

Dans les oscillations verticales des chaînes, c'est-à-dire, dans les abaissemens et élévations alternatifs de chaque point, qui résultent d'un choc imprimé verticalement, on doit distinguer, 1.° la direction du mouvement des points; 2.° l'étendue de ces mouvemens, c'est-à-dire la grandeur des espaces que les points parcourent à partir des situations qu'ils occupent dans l'état d'équilibre; 3.° la vîtesse avec laquelle les points se meuvent (et comme ces vîtesses varient continuellement pendant la durée des oscillations, on considérera, pour fixer les idées, la plus grande des valeurs qu'elles acquièrent); 4.° la durée des oscillations. Cela posé, en considérant des arches de diverses grandeurs, dans lesquelles le poids de la construction correspondant à chaque unité de longueur du plancher est toujours le même, et supposant la masse qui exerce le choc fort petite par rapport à la masse totale de la construction, la solution apprend, 1.° que les points se meuvent sans sortir de la ligne verticale où ils se trouvent placés; 2.° que l'étendue des déplacemens est, toutes choses égales d'ailleurs, proportionnelle à la racine carrée de la flèche de la courbe décrite par les chaînes, et réciproque à l'ouverture de l'arche, en sorte que, pour des ponts de diverses grandeurs et de figures semblables, cette étendue est réciproque à la racine carrée de la longueur du plancher; 3.° que les vîtesses des points sont indépendantes de la flèche de la courbe des chaînes, et réciproques à la longueur du plancher; 4.° que la durée des oscillations est proportionnelle à la racine carrée de la flèche de la courbe des chaînes. L'étendue des déplacemens et les vîtesses des points sont d'ailleurs d'autant moindres que le poids de l'unité de longueur de la construction est plus grand par rapport au poids de la voiture qui exerce le choc. On conclut donc de ces résultats qu'un pont suspendu sera d'autant plus ferme, 1.° qu'à chaque unité de longueur de la construction il correspondra un plus grand poids; 2.° que ce pont aura plus

d'ouverture, ou bien qu'à ouverture égale, les chaînes auront moins de courbure.

A l'égard des vibrations longitudinales des chaînes, nous distinguons, 1.° l'étendue des espaces que les points parcourent au-delà et en-deçà des situations qu'ils occupent dans l'état d'équilibre; 2.° la proportion suivant laquelle les parties de la chaîne sont allongées et accourcies alternativement; 3.° les vîtesses des mouvemens des points; 4.° les durées des vibrations. On déduit des résultats de la solution analytique, en supposant constant, comme ci-dessus, le poids correspondant à l'unité de longueur de la construction, 1.° que l'étendue des déplacemens des points est proportionnelle à la puissance $\frac{3}{2}$ de la flèche de la courbe des chaînes, et réciproque à la troisième puissance de l'ouverture des arches, en sorte que, pour des ponts de diverses grandeurs et de figures semblables, cette étendue est réciproque à la puissance $\frac{3}{2}$ de la longueur du plancher; 2.° que les allongemens et accourcissemens alternatifs des parties des chaînes sont proportionnels à la puissance $\frac{3}{2}$ de la flèche de la courbe, et réciproques à la quatrième puissance de l'ouverture, en sorte que, pour des arches de diverses grandeurs et de figures semblables, ces allongemens sont réciproques à la puissance $\frac{5}{2}$ de la longueur du plancher; 3.° que les vîtesses des points sont proportionnelles à la flèche de la courbe des chaînes, et réciproques au cube de l'ouverture, en sorte que, pour des ponts de diverses grandeurs et de figures semblables, ces vîtesses décroissent proportionnellement au carré de l'ouverture; 4.° enfin que la durée des vibrations est proportionnelle à la racine carrée de la flèche de la courbe des chaînes. L'étendue des déplacemens, les allongemens et accourcissemens alternatifs des parties des chaînes, les vîtesses des points, sont d'ailleurs proportionnels au carré du rapport du poids du corps qui exerce le choc au poids correspondant à l'unité de longueur de la construction. Par conséquent, les effets dont il s'agit ici sont encore d'autant moins sensibles que chaque unité de longueur du pont est plus pesante, que le pont a plus d'ouverture, et la courbe des chaînes moins de flèche. La grandeur de ces effets décroît même dans une progression beaucoup plus rapide que celle dont il a été question précédemment, lorsqu'on augmente la masse ou l'étendue des constructions.

Les chaînes forment la partie principale des ponts, et celle qu'il importe le plus de mettre à l'abri de tout accident. A l'égard des tiges verticales par lesquelles le plancher est suspendu aux chaînes, il est à remarquer que les pre-

miers constructeurs ont jugé que ces pièces, exposées plus directement et plus immédiatement que les chaînes à l'action des chocs, devaient, par cette raison, avoir plus de force. On a donc donné aux tiges de suspension des dimensions beaucoup plus considérables qu'aux chaînes, eu égard aux efforts qu'elles avaient à soutenir dans le sens de la longueur, la construction étant supposée en équilibre. Le calcul rend raison de cette circonstance, éclaircit et précise les notions par lesquelles on s'était laissé guider. Il apprend que les vibrations longitudinales qui s'établissent dans les tiges, par l'effet des chocs, sont beaucoup plus rapides et plus étendues que celles qui s'établissent dans les chaînes, en sorte que les premières pièces seraient bien plus fatiguées et bien plus exposées à rompre que les dernières, si on ne leur donnait pas une force plus grande, eu égard au poids qu'elles supportent.

On s'est quelquefois demandé quel serait, sur un pont suspendu, l'effet d'un choc très-violent, tel que celui résultant de la chute d'une voiture pesante, dont l'essieu viendrait à rompre. Je ne crains point d'affirmer ici que, sur un pont dont l'ouverture serait considérable, un choc semblable ne causerait aucune altération dans les chaînes : les effets qu'il pourrait produire se réduiraient tout au plus à la rupture d'une ou de deux tiges de suspension ; accident qui n'aurait pas de suites graves, et auquel il serait facile de remédier.

Les résultats qui viennent d'être exposés, ont été obtenus au moyen du calcul des différences partielles, l'une des branches de l'analyse mathématique les plus fécondes et les plus utiles pour l'étude de la philosophie naturelle. J'ai employé les méthodes d'intégration imaginées par M. Fourier, à l'occasion de ses recherches sur la théorie de la chaleur, et qui offrent des ressources précieuses pour la solution d'un grand nombre de questions importantes.

Il me paraît, monsieur le Directeur général, qu'au moyen des résultats dont je n'ai pu présenter ici qu'une exposition sommaire, la nature et les propriétés des nouvelles constructions dont il s'agit, sont aussi bien connues que l'on puisse le desirer. En effet, nous pouvons, non-seulement calculer les efforts exercés dans toutes les parties, et les changemens résultant de l'action des charges passagères, mais apprécier même les mouvemens de vibration qui s'établissent dans les pièces principales, par l'effet des secousses ; mouvemens dont l'étendue et la rapidité paraissent offrir la mesure la plus naturelle de la fatigue que les matériaux éprouvent, et du danger des ruptures. Nous sommes bien éloignés de connaître d'une manière aussi intime le système des ponts ordinaires

en bois ou en fer fondu, dont le temps a rendu l'usage si familier. Il était nécessaire, sans doute, de faire une étendue approfondie d'un genre de construction qui semblait offrir de grands avantages, et sur lequel le temps et l'expérience n'avaient encore presque rien appris; mais cette étude n'aurait pas été possible sans les progrès que l'analyse mathématique a faits dans ces derniers temps, et sans les institutions au moyen desquelles les personnes chargées de la direction des travaux publics se trouvent initiées aux connaissances mathématiques les plus élevées.

La conclusion la plus générale et la plus importante à laquelle on se trouve conduit par les recherches précédentes, est que les effets qui peuvent être à craindre dans les ponts suspendus, tels que la flexion du plancher sous le poids des voitures, l'étendue et la rapidité des oscillations et des vibrations, demeurent les mêmes, ou deviennent moins sensibles, lorsque l'ouverture des arches augmente. C'est donc avec raison que l'on a dit précédemment que les ponts de ce genre étaient éminemment propres à franchir les plus grandes ouvertures. La difficulté de ces constructions diminue quand l'étendue des arches devient plus considérable, et le succès est d'autant mieux assuré, que l'entreprise est plus grande et semble plus hardie.

La dernière partie du Mémoire ci-joint est consacrée à l'exposition des projets de deux constructions supportées par des chaînes de fer, et à l'application à ces constructions des règles et des méthodes de calcul exposées dans la seconde partie. J'ai cru devoir faire une semblable application, pour répandre sur ces méthodes une clarté nécessaire, et parce que des formules soumises à l'épreuve du calcul numérique devaient inspirer plus de confiance. L'une de ces constructions est un pont suspendu de 150 mètres d'ouverture, qui serait établi sur la Seine, à Paris, entre l'esplanade des Invalides et les Champs-Élysées : les projets détaillés vous ont été soumis il y a quelques mois, et ont été approuvés par le conseil général des ponts et chaussées, après un examen approfondi, fait par une commission spéciale. L'autre est un pont-aqueduc d'environ 100 mètres d'ouverture, destiné à un canal de grande navigation.

M. le comte de Chabrol, préfet du département de la Seine, a eu l'idée de suspendre le tuyau d'une conduite d'eau à une chaîne de fer forgé, pour faire traverser à cette conduite un vallon de 195 mètres de largeur. Cette invention ingénieuse est susceptible de recevoir de grands développemens, et semble devoir apporter des améliorations essentielles à l'art de construire les aqueducs, les canaux d'arrosage et les canaux navigables. De petits canaux,

formés par des feuilles de zinc ou de cuivre, et suspendus à deux chaînes parallèles, pourraient être substitués avec avantage aux aqueducs en maçonnerie, tels que ceux d'Arcueil ou de Buc, et ne coûteraient peut-être pas la dixième partie du prix de ces ouvrages. Avec un moyen aussi sûr et aussi économique pour faire traverser les vallons par les conduites d'eau, on éviterait souvent, en projetant les rigoles des canaux de navigation, de donner à ces rigoles de longs développemens, qui obligent à mettre plus d'intervalle entre le niveau des prises d'eau et celui du point de partage, et qui exposent presque toujours à de grandes filtrations.

Il existe en Angleterre plusieurs ponts-aqueducs formés par un canal en fer fondu porté sur des arches du même métal. On peut également suspendre un canal en fer fondu à des chaînes de fer forgé; et l'on reconnaît, d'après le projet que j'ai donné pour une construction de ce genre, non seulement qu'elle serait praticable pour les plus grands canaux, mais qu'elle offrirait même une économie très-considérable sur les ponts-aqueducs ordinaires en maçonnerie. Je dois remarquer ici que l'application du principe de la suspension aux ponts-aqueducs est plus naturelle et plus satisfaisante encore que l'application du même principe aux ponts destinés au passage des voitures. En effet, dans ce dernier cas, la construction est exposée à fléchir sous le poids de la voiture, et peut être fatiguée par l'effet de ces flexions fréquemment répétées, aussi bien que par les mouvemens causés par les secousses. Ces inconvéniens disparaissent dans les ponts-aqueducs, puisqu'il ne peut y avoir de secousses sensibles, et parce que l'eau qui supporte les fardeaux mobiles en répartit toujours également le poids dans toute l'étendue de chaque bief, en sorte que les chaînes ne sont point sollicitées à changer de figure par l'effet du passage des bateaux.

Pour fixer entièrement les idées sur l'objet de ce Rapport, il serait nécessaire d'ajouter quelques notions sur la dépense que doivent causer les ponts et les ponts-aqueducs suspendus à des chaînes. Cette dépense dépend, en grande partie, des circonstances locales, et on ne peut offrir, à ce sujet, qu'un petit nombre de résultats généraux. Il est évident que, la largeur du plancher d'un pont étant fixée, la valeur de ce plancher est, dans tous les cas, proportionnelle à la largeur de la rivière que l'on veut traverser. La valeur des chaînes, si l'on traverse cette rivière par une seule arche, sera, toutes choses égales d'ailleurs, proportionnelle au carré de l'ouverture de cette arche; et si l'on fait plusieurs arches, cette valeur sera à peu près proportionnelle au carré de

la largeur de la rivière, et en raison inverse du nombre des arches. Les règles très-simples que j'ai données pour déterminer la quantité de fer qui doit être employée dans les chaînes, ne laisseront aucune incertitude sur la dépense causée par cette partie de la construction. Quant à la dépense des ouvrages nécessaires pour supporter les chaînes et pour en fixer les extrémités, elle dépend presque entièrement des circonstances locales, et ne peut être connue, dans chaque cas, qu'au moyen d'un projet détaillé.

En cherchant d'ailleurs à comparer la dépense des ponts suspendus à celle des ponts ordinaires, on reconnaît bientôt qu'il est impossible, à raison de l'influence des circonstances locales sur la valeur de ces constructions, d'établir, à cet égard, des règles générales et précises. Il peut arriver, en effet, que la dépense d'un pont de pierre, dans une certaine localité, devienne excessive, ou même que l'établissement de ce pont soit entièrement impossible, tandis que la construction d'un pont en chaînes y serait moins coûteuse qu'ailleurs. S'il fallait, toutefois, présenter, relativement à cet objet, des aperçus généraux, qui ne pourraient qu'être fort vagues et sujets à beaucoup d'exceptions, je remarquerais que les ponts que l'on construit ordinairement se divisent en quatre espèces; savoir : 1.° les ponts formés par des travées en bois portées sur des palées, qui sont les moins coûteux de tous; 2.° les ponts formés par des arches en bois portées sur des piles et culées en pierre; 3.° ceux formés par des arches en fer fondu, également portés sur des piles et culées en pierre; 4.° enfin, les ponts construits entièrement en pierre. Les ponts suspendus causeront généralement une dépense qui surpassera très-peu celle des ponts de la seconde espèce, et qui sera fort inférieure à celle des ponts de la troisième et de la quatrième espèce. Les constructions où l'on emploiera les chaînes de fer, coûteront toujours beaucoup moins que toute autre construction également durable.

Je terminerai ici, monsieur le Directeur général, l'exposé du travail que j'ai l'honneur de vous présenter. Les résultats de ce travail sont favorables au nouveau système de construction que vous m'avez chargé d'examiner. D'après les lumières que fournit une expérience de plusieurs années, et celles que l'on obtient par un examen approfondi, ce système paraît réunir l'économie et la solidité. Je pense que la durée des constructions de ce genre sera au moins égale à celle de tout autre édifice. Le temps seul donnera de la certitude à cette dernière assertion; mais on ne pourrait, à ce qu'il me paraît, la combattre

aujourd'hui par aucune raison solide, fondée sur les connaissances que nous possédons.

Les chaînes de fer seront employées dans trois cas principaux : elles remplaceront avec avantage les procédés ordinaires pour la construction des ponts servant au passage des rivières, et permettront d'établir des communications dans des lieux où ces procédés ne pourraient être appliqués ; on suspendra à ces chaînes des embarcadères qui faciliteront l'accès des ports et préviendront les naufrages; elles serviront enfin à supporter des aqueducs pour les conduites d'eau et pour les canaux de navigation.

La construction de ces divers édifices offre un champ nouveau à l'art de l'ingénieur. Par l'emploi du principe de la suspension, cet art acquiert des procédés plus économiques, plus faciles et plus étendus pour l'établissement des communications. Toutes les parties de ces nouvelles constructions sont assujetties à des règles exemptes d'arbitraire, dictées par la géométrie et la mécanique : la forme même est déterminée par les lois naturelles de l'équilibre, et les caprices du goût ne pourront jamais en altérer l'élégance.

L'usage des constructions en chaînes de fer, en donnant les moyens d'établir à peu de frais des ponts solides et durables, apportera de nouvelles facilités pour exécuter ces ouvrages avec des fonds fournis par des compagnies, et remboursés par des péages à terme; l'emploi des aqueducs suspendus diminuera la dépense des canaux de navigation. Ainsi, monsieur le Directeur général, l'adoption des nouvelles constructions qui sont l'objet de ce rapport, tend à favoriser l'application aux travaux publics du principe de l'association, et l'établissement du système de la navigation intérieure, deux élémens importans de la prospérité nationale, auxquels votre administration éclairée a su donner un grand développement.

J'ai l'honneur d'être avec un profond respect,

MONSIEUR LE DIRECTEUR GÉNÉRAL,

Votre très-humble et très-obéissant serviteur,

NAVIER.

A Paris, le 18 septembre 1823.

MÉMOIRE

SUR

LES PONTS SUSPENDUS.

1. L'ORIGINE des ponts suspendus est ancienne; on la trouve dans les ponts de cordes des Cordilières et dans les ponts de chaînes de la Chine et du Thibet. Un grand nombre de ponts supportés par des chaînes de fer ont été construits, depuis près de trente ans, dans les États-Unis de l'Amérique septentrionale; plusieurs ouvrages du même genre existent ou sont projetés en Angleterre. Ce nouveau mode de construction ne tardera pas à s'introduire en France et dans les autres parties de l'Europe. Une des inventions les plus anciennes et les plus simples pour le passage des fleuves et des vallons escarpés, demeurée long-temps dans l'oubli, se trouve ainsi reproduite chez les nations civilisées par l'effet naturel du progrès des sciences et des arts.

On se propose de faire connaître dans ce Mémoire les principaux ponts suspendus construits ou projetés jusqu'à présent, de rechercher les conditions de l'équilibre et les lois de l'établissement de ces édifices.

2. Les ponts suspendus peuvent présenter deux dispositions différentes. Dans la première, des chaînes sont tendues entre des points fixes; le plancher repose sur ces chaînes, ou est suspendu au-dessous au moyen de tiges verticales. Dans la seconde, des tiges inclinées partent des points fixes, et viennent s'attacher à d'autres points distribués sur la longueur du plancher. La première disposition a été généralement adoptée, et paraît convenir seule aux grands ouvrages. Dans ces deux genres de construction, les parties les plus essentielles, celles qui soutiennent le poids du plancher et des fardeaux auxquels ce plancher donne passage, se trouvent tendues dans le sens de la longueur. La solidité de l'édifice dépend de la résistance de ces pièces à l'extension, et les ponts dont il s'agit diffèrent essentiellement sous ce rapport des autres ponts, où les pièces principales ne sont jamais exposées qu'à fléchir ou à se contracter.

3. Il existe entre les ponts que l'on construit communément et les ponts soutenus par des chaînes une autre différence, qu'il importe beaucoup de remarquer. Dans les

premiers, le plancher est supporté par un ensemble de pièces formant plusieurs arcs dont la convexité est tournée en haut : ce plancher peut être placé en dessus, et reposer sur ces arcs ; on peut aussi le suspendre en dessous. Dans les deux cas, le poids de la construction tend à comprimer les pièces, et réagit contre les points d'appui pour les écarter l'un de l'autre. Si, pour un instant, on assimile un tel système à des courbes flexibles chargées de poids, on voit que l'équilibre n'en est point stable. Il est nécessaire que ces courbes, non-seulement présentent la force nécessaire pour résister à la compression qui tend à en rapprocher les parties, mais encore ne puissent fléchir ou se déverser : on est par conséquent obligé, en augmentant l'ouverture des arches, d'augmenter dans une progression rapide la force et la liaison des parties du système. Dans les ponts suspendus, les pièces qui soutiennent le plancher forment au contraire des arcs dont la convexité est tournée en bas ; l'effet du poids de la construction est d'étendre les parties de ces arcs, en attirant l'un vers l'autre les points fixes auxquels les extrémités sont assujetties ; l'équilibre du système est stable, lors même que les arcs sont parfaitement flexibles, et il suffit que ces arcs résistent aux tensions qui s'exercent dans le sens de la longueur : une augmentation dans la grandeur des arches oblige seulement à employer des chaînes plus fortes. On peut donc exécuter facilement, par ce dernier mode de construction, des ponts d'une très-grande ouverture. Ces ponts n'exigeant point d'ailleurs le secours d'un cintre pour en assembler les parties et les mettre en place, on peut les établir dans les lieux même où les procédés ordinaires ne pourraient être appliqués sans de grandes difficultés ; par exemple, sur un vallon escarpé et profond, ou sur un bras de mer agité par les vents.

4. Les constructions en chaînes de fer ne sont pas bornées à l'établissement des ponts ; on les emploie aussi à former de légers embarcadères suspendus sur les vagues, et établissant une communication toujours sûre entre le rivage et des plates-formes en charpente construites à une distance considérable. On espère, au moyen de cette application nouvelle, mettre l'embarquement et le débarquement des passagers et des troupes à l'abri des retards et de la plupart des chances de la mer ; on espère même prévenir les naufrages dans les lieux où ils sont le plus fréquens, en plaçant ainsi d'avance des moyens de secours toujours prêts au-delà de la ligne où brisent les vagues, et que les marins les plus hardis n'osent s'exposer à franchir dans leurs embarcations.

PREMIÈRE PARTIE.

DESCRIPTION HISTORIQUE DES PONTS SUSPENDUS.

5. Les récits des voyageurs ont fait connaître depuis long-temps les ponts de cordes dont l'usage existait dans plusieurs contrées de l'Amérique méridionale avant l'arrivée des Européens. La figure 1, planche I.re, représente le pont de Pénipé, sur lequel M. Alexandre de Humboldt a traversé la rivière de Chambo, dans le mois de juin 1802, et qu'il a décrit dans le bel ouvrage intitulé *Vues des Cordilières et Monumens des peuples indigènes de l'Amérique*. Ce pont est formé par des cordes de $0^m,1$ de diamètre, faites avec les parties fibreuses des racines de l'*agave Americana;* la longueur est de 40 mètres, et la largeur d'environ $2^m,5$. Les cordes principales sont recouvertes transversalement de petites pièces cylindriques de bambou; elles sont attachées des deux côtés du rivage à une charpente grossière composée de plusieurs troncs de *schinus molle*. Il existe d'autres ponts construits de la même manière, dont les dimensions sont beaucoup plus considérables : ces ponts sont très-utiles dans un pays montueux, où la profondeur des crevasses et l'impétuosité des torrens s'opposent à la construction des piles. C'est par un pont de ce genre, d'une longueur extraordinaire, et sur lequel les voyageurs peuvent passer avec des mulets de charge, que l'on est parvenu depuis quelques années à établir une communication entre les villes de Quito et de Lima, après avoir dépensé inutilement un million de francs pour construire près de Santa un pont de pierre sur un torrent qui descend de la Cordilière des Andes.

6. On emploie également, pour franchir les vallons des Cordilières, un procédé plus imparfait et plus dangereux que le précédent; il est connu sous le nom de *tarabita*. Un câble, fait en lianes ou avec des bandes de peau, est tendu d'un bord à l'autre; une des extrémités est attachée à un poteau, et l'autre passe sur une roue, ce qui permet d'en régler à volonté la tension. Une sorte de hamac ou de nacelle en cuir, dans laquelle un homme peut se placer, est suspendue à ce câble par deux brides, et glisse d'une extrémité à l'autre : ce glissement, facilité par la pente du câble, s'opère au moyen d'une impulsion donnée à la nacelle. Il y a deux câbles, dont les pentes

A*

sont en sens contraire, et qui servent à passer alternativement d'un côté à l'autre. On fait aussi passer les mules et autres animaux au moyen d'un appareil qui les saisit sous le ventre et sous le cou, et qui glisse le long du câble. La description de ces moyens de communication a été donnée par Jean de Ulloa, et insérée dans divers ouvrages.

7. Les constructions du même genre qui existent dans les grandes Indes, sont principalement connues par la Relation de l'ambassade de Turner au Thibet. Après avoir indiqué plusieurs passages où les rivières sont franchies par des ponts de cordes semblables à ceux du Pérou, ce voyageur décrit avec plus de détail le pont appelé *Chouka-cha-zum*, formé par des chaînes en fer. Cet ouvrage est situé sur le Sampoo et sur la route qui conduit à Lassa; la figure 2, planche I.re, copiée sur celle de Turner, en représente la disposition. On n'y fait passer qu'un cheval à-la-fois; le plancher fléchit pendant qu'un homme le parcourt, et la réaction qui s'opère à chaque mouvement, oblige à presser le pas. Sur les cinq chaînes dont le plancher est formé, sont posées plusieurs couches de clisses de bambou, qui, n'étant point attachées, se déplacent lors des oscillations du pont; un parapet des mêmes matériaux, placé de chaque côté, rassure le voyageur.

Le major Rennel, dans sa *Description de l'Indostan*, parle du même ouvrage d'après Giorgi. Chaque chaîne est composée, suivant lui, de cinq cents anneaux, ayant un pied de diamètre. Supposant qu'il s'agit de pieds italiens, Rennel en conclut que le pont aurait environ 160 verges anglaises [146^{m}] de longueur; ce qui ne s'accorde point avec la figure de Turner, qui annonce avoir mesuré les parties de la construction, et donne seulement 150 pieds [46^{m}] de longueur au plancher. L'auteur nous apprend que presque tous les autres ponts de cette contrée sont également construits avec des chaînes de fer.

8. Turner décrit, quelques pages plus loin, un pont pour le passage des piétons, formé de deux chaînes tendues parallèlement l'une à l'autre, à 4 pieds de distance, et reposant à chaque bord sur un pilier de pierre d'environ 8 pieds de hauteur. Ces chaînes se dirigent ensuite vers la terre, suivant une légère inclinaison, et pénètrent dans le rocher, où elles sont arrêtées autour d'une grosse pierre ensevelie sous un monceau de pierres plus petites. Une planche d'environ 8 pouces de largeur est suspendue longitudinalement au travers de la rivière par des liens formés de racines et de plantes rampantes, et dont la longueur est telle, que le milieu s'abaisse à 4 pieds au-dessous des chaînes. La longueur de ce pont, nommé *Selo-cha-zum*, est de 18 mètres, mesurée d'une rive à l'autre. Les liens sont changés tous les ans, et, les planches n'étant point fixées, chaque partie peut être réparée séparément. Cet ouvrage paroît différer du Chouka-cha-zum en ce que le plancher est suspendu au-dessous des chaînes.

9. Il existe en Chine des ponts semblables aux précédens. Les passages suivans

sont extraits de la description de cet empire qui se trouve dans le tome VI de l'*Histoire générale des voyages*.

«.... On voit dans la partie ouest de ce canton (province de Yun-nan, district de » King-ton-fu) un pont soutenu par des chaînes de fer, dont l'agitation, jointe à la vue » des précipices, forme un spectacle terrible pour les passans.....

» Le fameux *pont en fer* (tel est le nom qu'on lui donne), à Quay-cheu, sur la route » de Yun-nan, est l'ouvrage d'un ancien général chinois. Sur les deux bords du Pan-ho, » torrent qui a peu de largeur, mais qui est très-profond, on a construit une grande » porte entre deux gros piliers de pierre, larges de 6 à 7 pieds, sur 17 à 18 pieds de » hauteur. Des deux piliers de l'est pendent quatre chaînes, attachées à de gros anneaux, » qui vont aboutir aux deux piliers de l'ouest, et qui, étant jointes par d'autres petites » chaînes, ont quelque ressemblance avec un filet. On a placé sur ce pont de chaînes » des planches fort épaisses, qu'on a trouvé moyen de joindre ensemble pour en faire » un plain-pied continuel : mais comme il reste quelque distance jusqu'aux portes et » piliers, parce que les chaînes se courbent en arc, sur-tout lorsqu'elles sont chargées, » on a remédié à ce défaut avec le secours d'un plancher supporté par des tasseaux ou » des consoles. Des deux côtés du plancher, on a dressé de petits pilastres en bois, » qui soutiennent un toit de la même matière, dont les deux bouts portent sur les » piliers de pierre des deux rives.

» Les Chinois ont fait quelques autres ponts à l'imitation de celui-ci. On en connaît » un particulièrement sur la rivière de Kin-cha-hyang, dans l'ancien canton de Lo-lo, » qui appartient à la province de Yun-nan. Celle de Se-chuen en a deux ou trois » autres qui ne sont soutenus que par des cordes; mais, quoique petits, ils sont si » chancelans et si peu sûrs, qu'on ne les passe pas sans effroi. »

On peut voir un dessin de ces ponts de chaînes planche XXIII du *Parallèle des édifices* de M. Durand, ouvrage publié à Paris en 1801.

10. On desirerait trouver dans les écrits des voyageurs des détails plus circonstanciés sur l'époque de l'établissement de ces constructions, et sur la disposition et les dimensions de leurs parties. Il est vraisemblable d'ailleurs que ces détails, qui satisferaient la curiosité, n'offriraient, sous le rapport de l'art, qu'un médiocre intérêt : on ne peut douter, en effet, que les ponts de chaînes des Indes ou de la Chine ne soient bien éloignés d'offrir la solidité qu'il est nécessaire de leur donner en Europe. Il résulte toutefois des renseignemens qui nous sont transmis, que les premières constructions de ce genre appartiennent à l'Asie; on doit en conclure aussi que les chaînes de fer sont susceptibles d'offrir une longue durée, puisque l'époque de l'érection du pont de Chouka est inconnue des habitans du pays, et qu'ils donnent même à ce pont une origine fabuleuse.

11. Un fait remarquable, sur lequel on s'est procuré des renseignemens certains,

prouve également que le fer forgé peut demeurer pendant très-long-temps exposé à l'air sans éprouver d'altération sensible. Il existe une chaîne tendue d'un rocher à l'autre entre les deux pics qui dominent la ville de Moustiers, département des Basses-Alpes : d'après des détails transmis par M. Stanislas Léveillé, ingénieur en chef des ponts et chaussées, cette chaîne, dont la longueur est d'environ 200 mètres, est formée de tringles de $0^{m},65$ de longueur sur $0^{m},02$ de grosseur, agrafées les unes aux autres sans chaînons intermédiaires; on a suspendu au milieu une étoile à cinq pointes : le fer n'est point altéré par la rouille.

Les habitans du pays diffèrent d'opinion sur l'origine de ce monument, qui avait été déplacé à l'époque de la révolution, mais qui depuis a été rétabli. Les uns pensent que la ville de Moustiers en a fait hommage à la Vierge, pour obtenir d'être préservée de la ruine dont elle est menacée par les rochers qui la dominent; les autres l'attribuent au vœu qu'un chevalier de Rhodes, natif de Moustiers, aurait fait au XIIIe siècle, pendant la durée d'une longue captivité. On ne peut fixer avec précision la date de l'érection de cette chaîne; mais on est assuré qu'elle remonte à plusieurs siècles.

On pourrait citer d'autres exemples également favorables à l'opinion de la longue durée du fer forgé exposé à l'air, lors même que ce fer n'est préservé par aucun enduit. Il est vrai que l'on cite également des exemples contraires; mais on ne peut attacher aucune importance à ces derniers, sans connaître exactement les circonstances dans lesquelles le fer se trouvait placé. Il arrive souvent, en effet, que l'oxidation des pièces de fer est le résultat d'une action chimique exercée entre ces pièces et les matières employées pour les scellemens; ou bien de la décomposition de l'eau, causée par les actions électriques qui s'établissent dans le contact des métaux de natures différentes. On observe communément dans les rampes et dans les balustrades que le pied des barreaux est entièrement détruit, tandis que les parties supérieures, à peu de distance du scellement, ne sont nullement altérées.

12. Il existe depuis long-temps en Europe des constructions analogues à celles de l'Amérique et de l'Asie. On trouve dans les pays de mines des ponts ou plutôt des sentiers suspendus sur des chaînes de fer, et servant au passage des ouvriers. Hutchinson, dans un ouvrage intitulé *Antiquities of Durham*, publié à Carlisle en 1794, fait mention d'un pont de ce genre (planche I.re, figure 3) établi sur la Tees, qui sépare les comtés de Durham et d'Yorck. L'auteur le décrit en ces termes : « Les bords de la rivière offrent » quantité de sites des plus pittoresques et des plus romantiques, de belles chutes d'eau, » des rochers et des cavernes singulières. A deux milles environ au-dessus de Middleton, » dans un lieu où la rivière tombe en cascades multipliées, un pont suspendu sur des » chaînes en fer est jeté d'un rocher à l'autre, à près de 60 pieds [18^{m}] de hauteur: » ce pont sert au passage des voyageurs, et principalement des ouvriers qui travaillent

» aux mines; il a 70 pieds [21^m] de longueur, et un peu plus de 2 pieds [$0^m,60$] de » largeur, avec un parapet d'un côté. Le plancher est tellement fait, que le voyageur » ressent tout le mouvement d'ondulation de la chaîne, en même temps qu'il se voit » suspendu au-dessus d'un gouffre rugissant. Peu d'étrangers osent se hasarder sur ce » sentier étroit et sans cesse agité. » M. Stevenson, ingénieur résidant à Edinburgh, auteur d'un article intitulé *Description of bridges of suspension*, qui a paru, en octobre 1821, dans le n.° X de l'*Edinburgh philosophical Journal*, en regrettant de n'avoir pu connoître avec précision la date de l'établissement de ce pont, annonce s'être assuré, d'après une bonne autorité, qu'elle remonte à peu près à l'année 1741.

13. Les ingénieurs militaires ont souvent employé de semblables ponts construits avec des cordages, pour opérer le passage momentané des troupes, et même de l'artillerie. Il en existe actuellement un, établi d'une manière permanente, et formant la communication entre le rivage de la mer et une petite île fortifiée dans les environs de Brest.

14. La figure 4, planche Ire, est une copie exacte (réduite au quart de la grandeur) de la planche XXXV d'un ouvrage intitulé *Machinæ novæ Fausti Verantii Siceni* (*). L'explication est conçue en ces termes : « *Pont de cordes.* — Ce pont ici despend de deux » ou plusieurs cordes attachées à deux poutres eslevées en haut en l'une et l'autre rive; » et, afin qu'il ne tombe point à cause de la pesanteur des passans, l'on pourra tendre » ou relascher les cordes à volonté. Ce pont est portatif, et partant commode pour les » armées. » La disposition représentée par cette figure, offrant un plancher horizontal suspendu par des liens verticaux à des cordes tendues entre deux supports, est très-remarquable; cette disposition ne diffère en rien de celle des ponts les plus importans construits dans les États-Unis et en Angleterre. Le pont proposé par Faustus Verantius paraît offrir la première idée de l'application du principe des ponts suspendus aux usages et aux besoins des nations civilisées.

15. Le plancher de ces ponts, comme on l'a déjà remarqué (2), peut être supporté par des chaînes tendues d'un côté de la rivière à l'autre et attachées à des points fixes, ou par un certain nombre de tiges partant de ces mêmes points, et se dirigeant sous diverses inclinaisons à d'autres points distribués sur la longueur du plancher. Les deux constructions offrent une différence caractéristique, qui sera développée dans la suite de ce Mémoire. Les ponts soutenus par des chaînes forment un système flexible, tandis que, dans les ponts soutenus par des tiges inclinées, la figure du système est

(*) Cet ouvrage ancien et fort rare, dont le titre ne porte point de date, est écrit en langues latine, française, italienne, espagnole et allemande; on ne le trouve point indiqué dans la plupart des catalogues imprimés : j'en dois la connaissance à M. Vauvilliers, ingénieur en chef directeur des ponts et chaussées, qui en possède un exemplaire.

invariable; et de plus les pièces du plancher sont exposées, dans ces derniers ponts, à certains efforts qui n'existent point dans les premiers.

La disposition de divers ponts mobiles, et particulièrement des ponts tournans, offre des exemples de l'usage des tiges inclinées pour soutenir le plancher des ponts. M. Poyet paraît avoir eu le premier, il y a plus de trente ans, l'idée d'appliquer ce principe à la construction des ponts fixes. Dans les ponts projetés par cet architecte, le plancher est supporté par des liens inclinés en fer forgé, attachés à de grands mâts verticaux placés sur des piles en maçonnerie ou des palées en charpente, et rayonnant de l'extrémité supérieure de ces mâts vers des points également espacés sur la longueur du plancher.

L'auteur annonce dans son dernier écrit (publié en 1821) que l'on peut porter l'ouverture des travées jusqu'à 40 ou 50 mètres; il donne aux mâts verticaux une hauteur considérable, et qui, d'après ses dessins, dont la figure 5, planche I.re, est une copie, serait de 26 mètres pour des travées de 20 mètres. Les projets que M. Poyet a présentés à diverses époques pour des ponts destinés aux voitures, ont toujours été rejetés, parce qu'on n'a pas trouvé le passage disposé comme il convenait pour la sûreté et la facilité de la circulation. On remarquait aussi que les mâts verticaux placés sur les piles, étant peu susceptibles de résister à une action transversale, la solidité de la construction se trouverait fortement compromise lorsqu'une travée serait plus chargée que la travée voisine : mais il a toujours paru que des ponts projetés de cette manière pouvaient être employés pour le passage des personnes à pied (*).

16. Plusieurs dispositions différentes ont été proposées en 1800 pour l'établissement du pont du Louvre : d'après l'un de ces projets, le pont devait être soutenu par des cordes tendues d'un quai à l'autre.

17. Un autre projet plus important a été présenté, le 25 septembre 1807, par M. Bélu, ingénieur en chef des ponts et chaussées, pour l'établissement d'une communication sur le Rhin, entre Wesel et Ruderich. Les obstacles presque insurmontables qu'offrent dans cette partie du fleuve les débacles des glaces à l'établissement des piles, avaient fait penser qu'il était nécessaire de traverser au moins l'un des bras par une seule travée, dont l'ouverture devait être de 250 mètres. L'auteur proposait à cet effet de faire porter le plancher du pont sur une sorte de réseau en fer forgé, formé d'un grand nombre de chaînes disposées longitudinalement et transversalement, et composées de petits chaînons de $0^m,5$ de longueur, alternativement doubles et simples,

(*) On peut voir à ce sujet les avis donnés par le conseil des ponts et chaussées à l'époque où l'on s'occupait des ponts du Louvre et de la Cité, ainsi qu'un rapport fait en dernier lieu par une commission spéciale, et que M. Poyet a fait imprimer au commencement de 1822.

assemblés par des boulons. Ce réseau, fixé par les extrémités à des culées en maçonnerie, aurait formé une courbe de 250 mètres de corde sur 8 mètres de flèche. Comme la pente de cette courbe, dans le voisinage des culées, eût été trop rapide, on aurait soutenu le plancher par des montans, de manière à en régler convenablement l'inclinaison. L'examen de ce projet donna lieu à diverses objections, dont la principale était le manque de force des chaînes, comparativement à la tension qu'elles devaient supporter. Les chaînes proposées par l'auteur étaient effectivement trop faibles; mais il eût été facile, ou d'en augmenter la grosseur, ou d'en diminuer la tension en les plaçant au-dessus du plancher, ce qui eût permis de donner à ces chaînes une plus grande courbure.

18. Les États-Unis de l'Amérique septentrionale ont offert les premiers exemples de l'application en grand du principe des ponts suspendus. Le premier pont de ce genre, de $21^{m},3$ d'ouverture, a été construit en 1796, par M. James Finley, sur Jacob's-creek, au passage de la grande route d'Union-Town à Greenburgh. On trouve, dans un ouvrage publié à New-Yorck en 1811, par Thomas Pope, intitulé *Treatise on bridge architecture,* des détails intéressans sur ce sujet. Nous citerons d'abord la patente accordée en 1801 à M. James Finley, et qui contient la description suivante :

« Le pont est seulement supporté par deux chaînes en fer, une de chaque côté, » ayant leurs extrémités bien assurées dans le sol. Ces chaînes portent sur des piliers » d'une hauteur suffisante établis de chaque côté sur les culées, et s'étendent en » formant une courbe, de telle manière que les deux solives du milieu du rang inférieur » reposent sur les chaînes. Les autres solives du même rang sont attachées aux chaînes » par des suspensions en fer de diverses longueurs, en sorte que le tout soit de niveau. » Afin que la chaîne puisse soutenir la même charge qu'elle pourrait supporter si elle » était suspendue avec un poids attaché à l'extrémité, les piliers doivent être assez hauts » pour que la flèche de la courbe soit le septième de l'ouverture. Les extrémités des » chaînes descendent du sommet des piliers avec la même inclinaison qu'elles ont de » l'autre côté, jusqu'à ce qu'elles atteignent le fond d'une excavation assez grande » pour contenir des pierres ou d'autres matériaux dont le poids suffise pour contre- » balancer celui du pont et des fardeaux qu'il doit supporter. Les chaînes, s'il y en a » seulement une de chaque côté, doivent être partagées à chaque extrémité en quatre » branches, auxquelles on fera traverser autant de pierres en les boulonnant par dessous. » Ces pierres sont posées à plat sur le fond de l'excavation, et on peut les recouvrir » par d'autres pierres plates, de manière à assembler le tout, et à lui donner la même » solidité qu'aurait une plate-forme d'une seule pièce. Quatre ou un plus grand nombre de » pièces seront nécessaires pour former le rang supérieur du plancher; elles s'étendront » d'une extrémité à l'autre du pont, et seront composées de plusieurs morceaux placés,

» les uns par rapport aux autres, de manière que les extrémités reposent sur différentes » solives du rang inférieur. Ces pièces reçoivent les madriers. On trouvera probablement convenable que les chaînes soient faites avec des anneaux aussi longs que » l'espace entre les solives. Une partie des suspensions doit s'attacher à des anneaux de » la chaîne qui se trouveront placés de champ; ce qui peut se faire au moyen d'une » bride passant au travers de l'anneau supérieur de la suspension, embrassant celui » de la chaîne, et recevant une clavette par-dessus. Les autres suspensions passeront » au travers des anneaux de la chaîne placés à plat, et recevront une clavette par- » dessus. L'extrémité inférieure du dernier anneau des suspensions sera assez large pour » embrasser l'extrémité des solives du rang inférieur. »

19. L'auteur cite huit ponts de ce genre construits depuis l'année 1801. Le plus grand, placé sur les cataractes de Schuylkill, a 306 pieds [92^{m},6] de longueur, avec une pile de 10 pieds [3^{m},05] d'épaisseur; il est porté par deux chaînes en fer carré de 1 pouce $\frac{1}{2}$ [0^{m},038].

Un autre, à Cumberland (Maryland), a 130 pieds [39^{m},6] d'ouverture, sans pile, et 15 pieds [4^{m},6] de largeur; il est porté par deux chaînes dont le fer a 1 pouce $\frac{1}{4}$ [0^{m},032] de grosseur.

Un autre sur le Potowmac, au-dessus de Federal-City, des mêmes dimensions que le précédent.

Un autre sur la Brandywine, à Wilmington, de 145 pieds [44^{m},2] d'ouverture, sans pile, 30 pieds [9^{m},14] de largeur, supporté par quatre chaînes dont le fer a 1 pouce $\frac{3}{8}$ de grosseur [0^{m},035].

Un autre à Brownsville (Fayette-County) de 120 pieds [31^{m},1] de longueur, 18 pieds [5^{m},49] de largeur, où la grosseur du fer est de 1 pouce $\frac{1}{4}$ [0^{m},032].

Un autre près du même lieu, de 112 pieds [34^{m},1] de longueur, 15 pieds [4^{m}6] de largeur. La grosseur du fer est la même que dans le précédent.

20. Le même ouvrage fait encore mention d'un autre pont construit récemment sur le Merrimack, à trois milles au-dessus de Newbury-Port, dans l'état de Massachussett. « Ce pont consiste en un seul arc de 244 pieds [74^{m},4] d'ouverture; les culées, » qui sont en pierre, ont 47 pieds [14^{m},3] de longueur et 37 pieds [11^{m},3] de » hauteur. Les supports verticaux, maintenus par un système de charpente et établis » sur ces culées, ont 35 pieds [10^{m},7] de hauteur, et soutiennent dix chaînes séparées, dont les extrémités sur les deux côtés de la rivière sont ensevelies dans des » puits profonds, et fixées par de grandes pierres. Chaque chaîne a 516 pieds [157^{m},3] » de longueur; et dans l'endroit où elles portent sur les poteaux, elles sont triplées, et » faites avec des anneaux courts, ce qu'on assure être plus solide que si elles s'appuyaient sur ces poteaux au moyen de plaques de fer. Les quatre solives du milieu

» reposent sur les chaînes; toutes les autres sont suspendues aux chaînes principales, » afin de mettre le plancher de niveau. Ce plancher offre deux passages de 15 pieds » [4^{m},57] de largeur chacun, et il est assez solide pour recevoir les chevaux et les » voitures, quelle que soit la rapidité de leur marche, sans prendre de mouvement » bien sensible. Le parapet est épais et fort, ce qui contribue beaucoup à la fermeté » du plancher. Il y a trois chaînes dans chaque rang sur les côtés, et quatre dans le » rang du milieu : elles sont calculées de manière à soutenir près de 500 tonnes » [508 000^{k}]. La distance de la surface de l'eau au milieu du plancher est de 40 pieds » [18^{m},2]; il y a 35 pieds [10^{m},7] depuis le dessus des culées jusqu'à l'extrémité supé- » rieure des poteaux : ce qui forme en tout 62 pieds [18^{m},9]. La grandeur et la solidité » des culées, la largeur et la longueur du plancher, la hauteur de la construction, la » force apparente des chaînes, tout concourt à en faire un ouvrage surprenant. La » dépense entière ne s'est pas élevée à 25 000 dollars [135 500^{f}]. Les culées étant » en pierre, les poteaux couverts, et les chaînes peintes pour prévenir la rouille, le » plancher seul est exposé à se détériorer. Ce pont a été construit par Jean Templeman, » *esq.*, du district de Columbia, dont les talens dans ce genre de construction, et les » divers perfectionnemens qu'il a imaginés et mis en usage, ont été très-utiles et lui » ont acquis beaucoup de réputation. »

21. Le tome II de l'*Histoire de la navigation intérieure*, par M. Cordier, publié en 1820, contient la traduction d'un rapport sur les routes et canaux de l'Union, fait en 1808 par M. Gallatin, dans lequel il est fait mention des ponts en chaînes de fer construits par M. Finley. L'auteur annonce que quarante ponts de ce genre ont été établis en Amérique depuis l'époque où le brevet d'invention a été accordé. Il nous apprend que M. Finley fait pénétrer les chaînes de retenue dans des puits remplis de terre, que l'on ouvre tous les six ans pour goudronner les fers, afin de les préserver de la rouille. Le plus remarquable des ponts de chaînes dont il est question dans cet ouvrage, a été construit en 1815, sur la Lehecgh, à un mille au-dessous du village de Northampton. Ce pont est supporté par deux arches entières et deux arcs-boutans; sa longueur est de 475 pieds [145^{m}]. Les chaînes du milieu le partagent en quatre passages, deux pour les voitures, et un de chaque côté, de 6 pieds [1^{m},83], pour les piétons. Les chaînes sont faites avec des barres de fer de 1 pouce $\frac{1}{8}$ [0^{m},035] de grosseur. Cet ouvrage, où l'on a employé 54 milliers de fer en barres, a coûté 20 000 dollars [108 400^{f}].

22. M. Cordier fait aussi mention d'un pont en fil de fer servant au passage des personnes à pied, établi en 1815 sur le Schuylkill, près de Philadelphie, et dont le Bulletin de la société d'encouragement, année 1816, offre la description suivante, extraite d'un journal américain. « Le pont dont il s'agit est situé sur une rivière de

» 400 pieds [122^m] de largeur; il est composé de six fils de fer de $\frac{3}{8}$ de pouce [0^m,0095] » de diamètre, dont trois sont placés de chaque côté: ces fils, quoique fortement tendus, » décrivent une courbe partant des mansardes de la tréfilerie, et aboutissent à un gros » arbre situé sur la rive opposée, qu'ils entourent trois fois. Les poutrelles sur les- » quelles s'appuie le plancher ont 2 pieds [0^m,61] de longueur, 3 pouces [0^m,076] de » largeur, et 1 pouce [0^m,025] d'épaisseur; elles sont suspendues, dans un plan hori- » zontal, aux fils de fer, par des étriers aussi en fil de fer, n.° 6, à chaque extrémité du » pont, et au milieu par du fil moins fort. Les planches, de 18 pouces [0^m,46] de lar- » geur, sont attachées par des clous sur les poutrelles; et, pour empêcher leur séparation, » elles sont réunies entre elles par des brides en fil de fer. De chaque côté du pont est » une planche de 6 pouces [0^m,15] de largeur, à laquelle les poutrelles sont également » attachées. Trois fils de fer tendus de chaque côté le long des étriers servent de para- » pets. Le pont, élevé de 16 pieds [4^m,9] au-dessus de la surface de l'eau, a 400 pieds » [122^m] de longueur. La distance entre les deux points de suspension est de 408 pieds » [124^m].

» Le poids total du fil de fer est de........................	1 314 livres, ou	596^k
» La charpente et le plancher pèsent ensemble................	3 380	1 532.
» Les clous..	8	4.
TOTAL.........	4 702	2 132.

» Lorsque le temps est favorable, quatre hommes peuvent construire un pont sem- » blable en quinze jours. La dépense s'élève à 300 dollars [1 600^f] environ. »

23. Les projets présentés en Angleterre pour la construction des ponts suspendus à des chaînes sont postérieurs aux premiers ouvrages de ce genre exécutés en Amérique, et à la publication de l'ouvrage de T. Pope. Le premier de ces projets a été proposé vers l'année 1814, par M. Telford, pour l'établissement d'un pont sur la Mersey, à Runcorn, près de Liverpool. M. Barlow, auteur de l'ouvrage intitulé *An Essay on the strength and stress of timber*, publié à Londres en 1817, donne à ce sujet les détails suivans : « Ce pont, pour ne point apporter d'obstacles à la navigation, doit offrir seu- » lement trois passages ou ouvertures, celle du milieu de 1 000 pieds [305^m], et les » deux autres de 500 pieds [152^m] chacune. L'intrados doit être élevé de 70 pieds [21^m] » au-dessus du niveau des hautes eaux. L'exécution d'un pont avec des arches, d'après » ces données, paraît entièrement impossible, et il fallait du courage et du génie pour » concevoir quelque construction exécutable. M. Telford a proposé un pont suspendu » en fer, formé de seize câbles ou barres, composés de trente-six barreaux carrés de » $\frac{1}{2}$ pouce [0^m,0127] de côté, et de segmens de cylindre, de manière à former un

» immense câble cylindrique en fer, dont la longueur totale, y compris les parties ser-
» vant à l'attacher au rivage, sera de près de $\frac{1}{2}$ mille [800^m], et le diamètre d'environ
» 4 pouces $\frac{1}{2}$ [0^m,114]; ce diamètre étant la diagonale du carré formé par trente-six
» barreaux de $\frac{1}{2}$ pouce, diagonale qui deviendra évidemment le diamètre du cylindre,
» après que les segmens mentionnés ci-dessus auront été appliqués sur les quatre faces
» du prisme carré.

» Toutes ces barres de $\frac{1}{2}$ pouce, aussi bien que les quatre segmens, doivent être
» soudées en une seule longueur; et, étant assurées avec des frettes espacées de
» 5 pieds [1^m,52], enveloppées de flanelle, bien enduites avec une composition de
» résine et de cire pour les préserver de l'action de l'air, et liées avec du fil d'en-
» viron $\frac{1}{10}$ de pouce [0^m,0025] de diamètre, formeront, comme on l'a dit ci-dessus,
» un immense câble de fer d'une seule pièce. Le plancher du pont sera suspendu à
» seize câbles de cette espèce, et il offrira trois passages, deux de chaque côté pour
» l'allée et venue des voitures, et un au milieu pour les piétons. Les deux principaux
» supports pour la travée du milieu auront environ 140 pieds [43^m] de hauteur; et la
» flèche de l'arc renversé ou caténaire formé par les chaînes doit être $\frac{1}{20}$ de la corde,
» c'est-à-dire 50 pieds [15^m]. Les deux travées latérales offriront deux moitiés de caté-
» naire, qui, dans les premiers projets, devaient avoir la même courbure que la caté-
» naire de la travée principale, en sorte que le point le plus haut dans la travée du
» milieu se trouvait exactement dans la même ligne horizontale que les deux extrémités
» des travées latérales; disposition d'après laquelle les deux supports principaux n'au-
» raient éprouvé aucune action horizontale, et n'auraient eu aucune tendance à être
» renversés. Mais ce plan doit être légèrement modifié, afin de diminuer la dépense;
» et les extrémités des travées latérales ne seront pas élevées aussi haut que le milieu
» de l'arche principale. » M. Barlow rapporte ensuite diverses expériences destinées à fournir des données pour l'établissement de cette construction, et dont on trouvera le détail à la fin de ce Mémoire. Il vérifie de la manière suivante la solidité du pont.

24. Supposant une barre, considérée comme flexible, fixée à deux points d'attache distans de 1 000 pieds, l'abaissement du sommet de la courbe étant $\frac{1}{20}$ de la distance ou 50 pieds, il s'agit de trouver la longueur de la barre, et l'effort qu'elle exerce sur les points de suspension. Prenant 7,788 pour la pesanteur spécifique du fer, et $\sqrt{18}$ pouces pour le diamètre de la barre, on a 48 livres pour le poids d'un pied de longueur. Avec ces données, on trouve, par les formules connues de la chaînette (1), 11° 15′

(1) M. Barlow admet dans ce calcul, aussi bien que dans celui qu'on trouvera ci-après, que les chaînes des ponts suspendus affectent, dans l'état d'équilibre, la figure d'une chaînette. Cette supposition n'est pas exacte, comme on le verra dans la suite de ce Mémoire; mais l'erreur qui en résulte est peu importante lorsque la courbure des chaînes est très-faible, comme elle l'est effectivement dans le cas dont il s'agit.

pour l'inclinaison de l'élément extrême de la courbe sur l'horizon; 1 008 pieds pour la longueur de cette courbe, dont le poids total est par conséquent de 48384 livres, ou environ 21 tonnes $\frac{1}{2}$, et 124 005 livres, ou environ 55 tonnes, pour la tension aux points extrêmes. L'aire de la section transversale de la barre surpasse un peu 14 pouces; et en prenant 27 tonnes pour la force de cohésion du fer sur un pouce carré, on a 378 tonnes pour la force de la barre, qui, par l'action de son propre poids, n'est exposée qu'à une tension de 55 tonnes. Il en résulte, suivant l'auteur (1), qu'on pourrait la charger d'un poids additionnel de 92 tonnes avant qu'elle ne rompît, et que, puisque il existe seize barres semblables dans le pont projeté, ces barres pourraient porter sans se rompre 1 472 tonnes au-delà de leur propre poids. Or M. Telford évalue comme il suit la plus grande charge à laquelle les chaînes puissent se trouver exposées.

Plancher, sur 1 000 pieds de longueur; sapin.............	430 tonnes	920 livres.
——————————— chêne............	44	1 440.
Fer pour le plancher, les tiges de suspension et le parapet....	98	428.
Charge supposée se trouver à-la-fois sur les 1 000 pieds.....	100	0.
Plus grand poids suspendu à-la-fois........	673	548.

Il reste donc, lors de la plus grande tension, un excédant de force d'environ 800 tonnes.

M. Telford estimait les frais de construction du pont de Runcorn de 63 000 à 85 000 livres [1 588 000 à 2 142 000^{f}], suivant différens modes de construction. On n'a pas encore commencé l'exécution de cet ouvrage, sur lequel on trouvera plus loin d'autres détails (37).

25. Postérieurement à la présentation du projet du pont de Runcorn, plusieurs ponts pour le passage des personnes à pied ont été construits en Écosse, sur le Tweed et les rivières voisines. M. Stevenson a donné à ce sujet, dans l'article déjà cité (12), des détails que nous allons transcrire.

Le premier de ces ponts a été établi en novembre 1816, à Galashiel, par M. Richard Lees, riche fabricant d'étoffes de laine. Il est formé de minces fils de fer, et sert à la communication des diverses parties de la manufacture; la longueur est de 111 pieds [33^{m},8], et il a coûté 40 livres [1 000^{f}].

(1) Il parait qu'il y a une erreur, page 247, ligne 25, de l'ouvrage cité de M. Barlow, cette ligne devant être écrite $(378-55)\ 0{,}39018 = 126$ tonnes, au lieu de $378 \times 0{,}39018 - 55 = 92$ tonnes; en sorte qu'on doit prendre 126 tonnes, au lieu de 92, pour la charge additionnelle que la barre peut soutenir avant de rompre. Il en résulte que le poids additionnel nécessaire pour rompre les 16 barres qui supportent le pont est 2 016 tonnes, tandis que la plus grande charge à laquelle elles se trouvent exposées n'est évaluée qu'à 673 tonnes $\frac{1}{2}$: le projet offre donc une plus grande sécurité qu'il ne parait résulter du calcul de M. Barlow.

26. Le second, également en fil de fer, est situé à King's-Meadows, sur le Tweed, à quelque distance au-dessous de Peebles : on en voit une esquisse dans la figure 6, planche I.re Ce pont a 110 pieds [$33^m,5$] de longueur, sur 4 pieds [$1^m,22$] de largeur, et est orné d'une belle loge, comme l'indique le dessin. Il a été exécuté, dans l'été de 1817, par MM. Redpath et Brown, d'Edinburgh, et a coûté environ 160 livres [$4\ 000^f$]. Il est soutenu par deux tuyaux en fer fondu érigés sur les côtés opposés de la rivière, à 4 pieds [$1^m,22$] de distance l'un de l'autre, dans chacun desquels est fichée une barre correspondante en fer forgé, et auxquels les fils de suspension sont attachés séparément par des boulons à vis. L'extrémité inférieure des tuyaux servant de piliers est portée par un patin ou grillage en bois placé sous terre, et indiqué par la lettre *a*; ils sont de plus maintenus sous le chemin par des contrefiches qui résistent à l'effort du poids et du mouvement du plancher. Les barres verticales mentionnées ci-dessus forment les portes ou entrées du pont; les liens et les fils de suspension sont attachés à ces barres, les longueurs respectives des fils étant réglées à volonté par des vis. Les tuyaux en fer fondu ont 9 pieds [$2^m,74$] de hauteur, 8 pouces [$0^m,20$] de diamètre, et $\frac{3}{4}$ de pouce [$0^m,019$] d'épaisseur. Les barres de fer forgé insérées dans ces tubes, et formant les points de suspension, ont 10 pieds [$3^m,05$] de hauteur, et 2 pouces $\frac{1}{2}$ [$0^m,063$] de grosseur en carré. Le plancher est formé avec des châssis en fer forgé, sur lesquels des planches de sapin de 1 pouce $\frac{1}{2}$ [$0^m,038$] d'épaisseur sont fixées avec des boulons. Les parapets sont exécutés soigneusement avec des tringles de fer, couronnées par une lisse en bois. On voit que le plancher est soutenu ici par des fils inclinés, disposition qui diffère de celle des ponts de chaînes. Les fils de suspension sont de la force connue des artistes sous le n.° 1, et ont environ $\frac{1}{10}$ de pouce [$0^m,0076$] de diamètre. Les liens qui se dirigent vers la terre sont faits avec des tringles de $\frac{3}{4}$ de pouce [$0^m,019$] de diamètre, formant des chaînons de 5 à 6 pieds [$1^m,6$] de longueur. Les vis, dont le diamètre est d'un pouce [$0^m,025$], sont au nombre de quarant-deux, et, par leur moyen, on peut tendre et relever à volonté les liens et les fils de suspension. Quand les fers sont ainsi tendus, le plancher n'a que fort peu ou point de mouvement, et offre seulement un léger tremblement, qui, loin d'inquiéter, est propre au contraire à faire présumer la fermeté et la sûreté de la construction. Pour éprouver la force de ce pont, il a été entièrement couvert de personnes peu de temps après son érection, sans qu'il en résultât aucun inconvénient.

27. Il existe un autre pont en fil de fer, construit par le capitaine Napier, sur l'Etterick, à Thirlstane-Castle; il remplace un pont en cordes pour les personnes à pied : son ouverture est d'environ 125 pieds [38^m].

28. Les trois ponts dont on vient de parler ont leur plancher soutenu par des liens inclinés. La même disposition avait été adoptée dans un premier pont établi à Dryburgh-

Abbey, où les tiges de suspension rayonnaient de leurs points d'attache sur chaque rive, en se dirigeant vers le milieu du plancher. L'usage des chaînes n'avait point encore été introduit sur le Tweed. Le pont de Dryburgh a 260 pieds [$79^m,2$] d'ouverture entre les points de suspension, et 4 pieds [$1^m,22$] de largeur. Cet ouvrage, commencé le 13 avril 1817, et livré au public le 1.er août suivant, a été exécuté, aux frais du comte de Buchan, par MM. John et William Smith, architectes.

M. John Smith a observé que le pont, disposé de la manière qui vient d'être indiquée, offroit un mouvement de vibration très-sensible lorsqu'on passait dessus. Le principal défaut de la construction provenait du peu de fixité des chaînes inclinées, de diverses longueurs, et qui formaient des segmens de courbes caténaires de différens rayons. Les mouvemens de ces chaînes parurent susceptibles de s'accélérer très-facilement ; et trois ou quatre personnes, qui s'amusaient fort mal à propos à essayer l'étendue de ces mouvemens, firent naître une telle agitation dans toutes les parties, qu'une des plus longues chaînes inclinées se rompit près du point de suspension. Dans une autre occasion, par un grand vent, une des chaînes horizontales placées sous les poutrelles du plancher céda. Enfin, le 15 janvier 1818, environ six mois après l'achèvement du pont, il survint un coup de vent très-violent, et le mouvement de vibration devint si grand, que les plus longues chaînes inclinées furent encore rompues, la plate-forme emportée, et la construction entièrement détruite. Plusieurs témoins de cet événement s'accordèrent à rapporter que le mouvement vertical du plancher du pont, avant la chute, était presque égal à son mouvement horizontal, et semblait tel, qu'il aurait été capable de jeter dans la rivière une personne qui se serait trouvée sur ce plancher.

Les boucles formées à l'une des extrémités des tringles composant les chaînes étaient soudées ; mais à l'autre extrémité, le fer était simplement contourné, et fixé avec une bride, comme on le voit en *b*, figure 7, planche I.re ; et l'on doit observer qu'en examinant soigneusement, après la chute du pont, les parties de la chaîne, on ne trouva qu'un ou deux chaînons qui eussent manqué à l'extrémité soudée, tandis que tous avaient cédé à la boucle ouverte, de la manière indiquée en *bb*.

29. Ce pont avait coûté un peu moins de 500 livres [$12\,600^f$] ; on le rétablit en moins de trois mois, avec un supplément de dépense d'environ 220 livres [$5\,500^f$], en formant des chaînes suivant la figure 7, et suspendant le plancher aux chaînes par des tiges verticales. Le principal changement consiste en ce qu'on a soudé les boucles aux deux extrémités des chaînons. Le plancher a aussi été consolidé par un grillage en bois fortement assemblé, placé de chaque côté du pont, et servant de parapet. L'utilité de ce grillage a été spécialement constatée pendant la construction. Un grand vent étant survenu avant que le parapet ne fût mis en place, une des extrémités de la plate-

forme fut enlevée au-dessus du niveau de la route, et on représente le mouvement d'ondulation produit dans cette occasion comme étant semblable à une vague de la mer; effet qui parcourut toute l'étendue du pont, et parvint avec un mouvement de secousse *[jerking-motion]* à la dernière extrémité. Mais les parapets s'opposent à ce mouvement vertical, et on le trouve maintenant considérablement diminué. On a ajouté aussi au nouveau pont de Dryburgh des chaînes de retenue formées de tringles de fer, fixées à des pieux sur les deux bords de la rivière et attachées aux traverses du plancher, comme on le voit dans le plan, figure 7. On prétend qu'elles produisent quelque effet en diminuant le mouvement du pont dans les grands vents; mais M. Stevenson, qui donne ces détails, ne jugea pas, en visitant le pont en 1820, que ces chaînes pussent remplir efficacement cette destination.

Le nouveau pont de Dryburgh est soutenu par quatre chaînes principales, attachées deux à deux aux points de suspension, et disposées horizontalement l'une par rapport à l'autre. La partie la plus basse de la courbe formée par chaque paire de chaînes tombe sur le sommet du parapet correspondant. Les parties des chaînes sont formées par des tringles en fer de 1 pouce $\frac{1}{8}$ [0^m,041] de diamètre, ayant chacune environ 10 pieds [3^m,05] de longueur. Les boucles formant les extrémités de ces longs chaînons sont assemblées par de petits anneaux de figure ovale, ayant 9 pouces [0^m,23] de longueur. Le plancher est suspendu aux chaînes par des tiges verticales en fer, ayant $\frac{1}{2}$ pouce [0^m,013] de diamètre, dont les extrémités supérieures sont attachées aux anneaux dont on vient de parler par une sorte de tête en croix, et dont les extrémités inférieures, qui sont taraudées, passent au travers des sommiers latéraux du plancher, en dessous desquels elles reçoivent des écroux portant contre des rondelles en fer.

Les points de suspension du pont, formés par des poteaux verticaux, sont élevés de chaque côté à 28 pieds [8^m,54] au-dessus du niveau du plancher. Les poteaux, en bois de Memel, sont disposés par paires, et laissent entre eux un espace de 9 pieds [2^m,74] de largeur, qui sert d'entrée au chemin établi sur le pont. Les sommets sont assemblés par des pièces transversales, sur lesquelles reposent les chaînes. Les deux paires de chaînes sont éloignées de 12 pieds [3^m,66] à l'entrée du pont; mais elles convergent en s'approchant du milieu, où elles sont attachées aux parapets, et où leur distance est seulement de 4 pieds $\frac{1}{2}$ [1^m,37], largeur de la voie du pont. Au moyen de cette convergence, elles servent en quelque sorte de chaînes de retenue au plancher. Mais on peut néanmoins, observe M. Stevenson, mettre en question jusqu'à quel point il convient de donner une direction oblique aux chaînes principales. Cet ingénieur est porté à penser qu'il est préférable de placer ces chaînes parallèlement à la direction de l'effort.

Le plancher du pont de Dryburgh est élevé d'environ 18 pieds [5^m,5] au-dessus des

basses eaux ; il est formé de deux sommiers en sapin qui courent dans toute la longueur du pont, et sont réunis par des traverses assemblées avec eux à tenons et mortaises. Des madriers sont placés sur cet assemblage, et on en a laissé les joints un peu ouverts, pour prévenir les effets de l'humidité. Au-dessous des sommiers sont tendues deux chaînes formées de verges d'un pouce [$0^m,025$] de diamètre, liées avec les culées en maçonnerie, et qui offrent de nouveaux motifs de sécurité.

Les chaînes inclinées vers la terre, et destinées à maintenir les poteaux verticaux, sont faites en verges d'un pouce [$0^m,025$] de diamètre ; ces chaînes pénètrent profondément dans le sol, en passant au travers de grandes pierres plates chargées d'un massif de maçonnerie construit dans la forme d'une portion d'arche.

On a fait, pendant l'érection du pont de Dryburgh, une remarque qui mérite d'être rapportée. La courbure des chaînes ne fut point la même lorsqu'elles soutenaient seulement leur propre poids, et lorsqu'elles furent chargées du poids du plancher. Aux deux extrémités du pont, et au milieu, les points de ces chaînes conservèrent la même position ; mais entre le milieu et chaque culée, le plancher forma deux courbes distinctes, dont la flèche était d'environ 7 pouces [$0^m,18$]. Ce défaut fut aisément corrigé en accourcissant les tiges de suspension ; « mais, ajoute M. Stevenson, cela » montre avec quelle facilité la courbe caténaire peut s'altérer, lorsque la charge est » distribuée suivant la direction horizontale du plancher. » On verra dans la suite de ce Mémoire quelle figure doit affecter une chaîne pour se maintenir en équilibre, lorsque la plus grande partie du poids qu'elle supporte se trouve ainsi répartie uniformément, non pas sur la chaîne elle-même, mais sur une ligne droite placée au-dessous dans le même plan vertical.

30. La date du rétablissement du pont de Dryburgh correspond à peu près avec celle du projet présenté par M. Telford pour la construction d'un pont suspendu sur le détroit de Menai, qui sépare l'Angleterre de l'île d'Anglesea. Ce pont est destiné à compléter l'établissement de la grande route de Londres à Holyhead, offrant une communication directe avec l'Irlande, et dont les travaux sont principalement dirigés par cet ingénieur. Les commissaires de la chambre des communes pour le perfectionnement de la route de Londres à Holyhead ont fait sur ce projet un rapport qui a été imprimé en 1819 par l'ordre de la chambre, avec les pièces à l'appui. Ces pièces, à raison de leur caractère officiel, offrant un intérêt particulier, nous avons cru devoir en donner un extrait détaillé.

La première est un rapport de M. Telford : le peu d'étendue de cet écrit permet d'en insérer ici la traduction.

« Rapport, Plan et Estimation pour la construction d'un Pont sur le détroit de Menai, » près du passage d'eau de Bangor.

» Toutes les fois que l'on s'est occupé du perfectionnement de la grande ligne de » communication entre Dublin et Londres, les inconvéniens et le danger de la tra- » versée du détroit de Menai, qui sépare l'île d'Anglesea du Carnavonshire, ont été » discutés, et il a été présenté un grand nombre de projets pour substituer une commu- » nication commode et permanente au passage d'eau qui existe présentement.

» Je n'entrerai pas dans le détail des moyens qui ont été regardés comme imparfaits, » ou comme donnant lieu à des objections; il suffira de dire que, dans les années » 1810 et 1811, des projets de pont en fer fondu, ayant une ouverture et une hauteur » suffisantes pour ne point gêner la navigation, ont été proposés, et, après un examen » attentif, approuvés par le comité de la chambre des communes, comme convenables » à la communication par terre, et n'apportant pas d'obstacles à la navigation.

» Dans le projet de ce genre que je présentai en 1811 par ordre des lords de la » trésorerie, qui consistait dans une arche en fer fondu de 500 pieds [152^m] d'ouver- » ture et de 100 pieds [30^m] de hauteur au milieu au-dessus des grandes eaux, et qui, » quoique plus économique qu'aucun autre pont en fer fondu de ces dimensions, coûtait » 127 331 livres [3 209 000^f], la principale difficulté pour la construction du pont » provenait de l'établissement du cintre. Ce cintre, à raison de la nature pierreuse du » fond, de la profondeur du canal et de la rapidité du courant de la marée, ne pou- » vait être supporté en dessous à la manière ordinaire. Je fus par là conduit à proposer » une nouvelle manière de le construire, en le soutenant par le dessus, et je fournis » un plan à cet effet, en même temps que le projet du pont. Ces dessins ont été » gravés, et annexés au rapport du comité de la chambre des communes sur la route » de Holyhead, en 1811.

» Ayant été chargé, en 1814, de donner un projet pour un pont destiné à traverser » la rivière Mersey à Runcorn, où il était nécessaire de conserver au passage d'eau une » largeur de 1 000 pieds [305^m], un pont conçu d'après le principe de la suspension » me parut le seul moyen praticable; et, dans cette vue, j'entrepris une suite régulière » d'expériences sur des verges de fer forgé, ayant depuis 30 jusqu'à 900 pieds de longueur, » et depuis $\frac{1}{10}$ de pouce jusqu'à 2 pouces de diamètre; tant sur des pièces isolées, que sur » des pièces réunies par des soudures ou par d'autres assemblages. La nature et les résultats » de ces expériences sont détaillés et discutés dans un excellent traité sur la force des » matériaux, publié dernièrement par M. Barlow, de l'académie royale de Woolwich.

» J'eus des motifs pour en conclure que l'on pouvait construire solidement en fer

» forgé convenablement disposé, un pont de 1 000 pieds d'ouverture, et en conséquence » je donnai un projet à cet effet.

» La facilité et l'économie avec lesquelles un pont de cette espèce peut être construit » lorsque les rives sont escarpées et élevées, me conduisirent à regarder ce système » comme susceptible d'être appliqué spécialement à la traversée du détroit de Menai, » un peu à l'ouest du passage d'eau de Bangor, à l'endroit où l'on avait d'abord projeté » une arche en fer fondu de 500 pieds d'ouverture. J'ai en conséquence dressé un plan » sur ce principe, afin de le soumettre aux commissaires pour le perfectionnement de » la route de Holyhead. Il consiste dans une arche d'environ 500 pieds [152^{m}] de » largeur, et de 100 pieds [30^{m}] de hauteur, entre la ligne des grandes eaux et le » dessous du plancher du pont. Ce plancher étant horizontal, cette hauteur subsiste » sur l'étendue entière des 500 pieds, jusqu'à l'endroit où le rocher naturel qui forme la » culée de l'ouest se trouve placé. Mais, en outre de ces 500 pieds, il y a quatre arches » du côté de l'ouest, et trois du côté de l'est, de l'ouverture chacune de 50 pieds » [15^{m}]; ce qui offre en totalité 850 pieds [259^{m}] de passage, comme l'indique » le dessin ci-joint (*voyez* la figure 8, planche Ire). On peut juger aussi, d'après » ce dessin, que ce système est préférable, pour la facilité de la navigation, à un » pont formé par une arche, parce que le dernier ne donne la hauteur entière de » 100 pieds qu'au milieu, tandis que le premier, comme on vient de l'observer, donne » cette hauteur sur la totalité des 500 pieds d'ouverture. Quant à l'économie, le pont » suspendu a également l'avantage, puisque j'ai estimé la dépense à 60 000 livres » [1 512 000^{f}] seulement, et qu'en ayant égard à l'augmentation possible dans le » prix du fer, ou à des difficultés imprévues dans l'approvisionnement de la pierre, » elle ne peut monter à plus de 70 000 livres, tandis que le pont le moins coûteux » qu'il fût possible de construire en fer fondu, s'élevait à près du double de cette » somme.

» A l'égard de la facilité de l'exécution, il doit paraître évident à la personne la » moins familière avec les opérations mécaniques, que la partie du pont formant la » grande ouverture, dans le projet, peut être construite presque aussi promptement » que le cintre seul d'un pont de même grandeur en fer fondu.

» Le succès d'un pont disposé d'après le principe de la suspension peut être assuré » d'avance par des expériences préliminaires; parce qu'avec une longueur et une courbure » données, il est reconnu que du fer forgé de bonne qualité peut supporter un certain » poids au-delà de son poids propre, d'où il suit que, le poids à supporter étant donné, » on peut, par une règle certaine, déterminer la quantité de fer requise; et de plus, » parce que la bonne qualité de chaque partie de fer employée peut être vérifiée d'avance. » Le mode d'assemblage le plus avantageux peut aussi être déterminé par des moyens

» semblables; et quoique j'aie déjà formé, d'après mes expériences, un plan praticable » et substantiel, je demanderai néanmoins, pendant la durée du travail de la maçon- » nerie, la permission de répéter et d'étendre ces expériences, afin d'arriver au mode le » plus parfait dont le principe soit susceptible.

» Le principe de la suspension pour la construction des ponts, que je propose ici, » quoiqu'il ne soit pas encore généralement employé dans ce pays, n'est pas nouveau. » Il était appliqué sur les rivières et les vallons profonds de l'Amérique du sud avant » l'arrivée des Espagnols : on en a fait un grand usage dans les Indes orientales et dans » la Chine; et dans les dernières années, huit ponts de cette espèce ont été construits » dans l'Amérique septentrionale. Si ces ponts, avec des matériaux et un mode d'exé- » cution très-imparfaits, ont été cependant portés, dans quelques occasions, avec un » succès complet, jusqu'à une étendue de 500 pieds, ce n'est certainement pas trop se » flatter que d'attendre davantage de la dextérité anglaise, employant des matériaux » supérieurs. Il n'y a qu'un petit nombre d'années que des ponts en fer fondu de 100 pieds » d'ouverture ont été hasardés avec timidité; et maintenant, quoique les ponts de cette » espèce aient, en quelques occasions, mal réussi entre les mains de constructeurs » ignorans, ils ont été portés avec succès, dans d'autres cas, à une ouverture de 130, » 150 et 240 pieds[73^m], sans que l'on voie presque d'autres limites à leur étendue, » si ce n'est celles qui tiennent à la disposition des localités ou à la dépense. Mais les » ponts sur le principe de la suspension, étant plus simples dans leur disposition, et d'une » construction beaucoup plus prompte et plus économique, offrent, pour des ouvertures » considérables, des facilités encore plus grandes que ceux en fer fondu, et par con- » séquent promettent de devenir d'une importance au moins égale.

» *Estimation.* J'estime la dépense, pour construire un pont sur le détroit de Menai, » près le passage d'eau de Bangor, le plancher étant placé à 100 pieds au-dessus des » hautes eaux, et la distance entre les points de suspension de 560 pieds, comprenant la » dépense des abords depuis les routes actuelles, carrières et indemnités, 60 000 livres.

» Londres, 7 mai 1818. *Signé* Thomas Telford.

» *N. B.* Le pont peut être construit en trois années. »

31. A ce rapport est joint un dessin dont la figure 8, planche I.re, est une copie. On vend à Londres une gravure imparfaite, publiée en 1820, et qui représente le même pont. Rien n'indique si cette gravure est faite ou non sous la direction de M. Telford. Elle diffère principalement du dessin joint au rapport de cet ingénieur, par la suppression des deux systèmes de croix qui accompagnent dans ce dessin le plancher du pont et les chaînes. D'après la gravure dont il s'agit, les chaînes sont distribuées dans quatre plans verticaux, qui partagent le pont en trois passages : celui du milieu, destiné aux piétons, a 4 pieds [$1^m,22$] de largeur, et les deux autres, destinés aux

voitures, ont 12 pieds [3^m, 66] de largeur chacun. Les chevalets en fer qui supportent les chaînes sont également formés de quatre fermes, établies dans des plans verticaux, et réunies transversalement par des pièces horizontales et inclinées. La même gravure donne les dimensions suivantes des principales parties du pont :

Ouverture du pont du centre de chaque tour	560 pieds, ou	170^m,69.
Hauteur depuis le niveau des hautes eaux	100.....	30, 48.
Ouverture de chaque arche	50.....	15, 24.
Largeur des piles à la base	15.....	4, 57.
——— au sommet	10.....	3, 05.
Hauteur des supports en fer sur chaque tour	35.....	10, 66.
Largeur des tours à la base	63.....	19, 20.
——— au sommet	39.....	11, 88.
Hauteur du parapet	6.....	1, 83.
——— des bureaux de perception	9.....	2, 74.
Profondeur du canal dans les hautes eaux	48.....	14, 63.
——— lors des basses eaux	27.....	8, 23.

32. On trouve après le rapport de M. Telford, dans les papiers imprimés par l'ordre de la chambre des communes, le rapport adressé, le 18 mai 1818, au chancelier de l'échiquier, par les commissaires pour le perfectionnement de la route de Londres à Holyhead. Les rapporteurs annoncent qu'ils ont interrogé diverses personnes sur la possibilité de la construction du pont suspendu proposé par M. Telford; que toutes se sont accordées à confirmer l'opinion de cet ingénieur, quant à la solidité et à la sûreté du pont, et à l'absence de toute gêne pour la navigation. Ils ajoutent que, quoique le mode de construction projeté ait été généralement trouvé convenable, ils se proposent toutefois, dans le cas où le parlement voterait des fonds pour l'exécution du travail sous leur direction, d'entrer dans un examen plus approfondi des calculs sur la force des matériaux dont on doit faire usage, et de la charge que ces matériaux seront capables de supporter, avant de donner leur autorisation pour commencer les travaux. Le rapport est suivi des interrogatoires appelés *minutes of evidence,* dont voici l'extrait :

33. *M. Barlow, professeur de mathématiques dans l'académie royale de Woolwich,* rend compte des diverses expériences sur la force du fer dont il a eu connoissance, ou qu'il a faites lui-même, et dont il résulte que la force moyenne d'une barre de fer d'un pouce carré est de 27 tonnes [42^k,5 par millimètre carré]. Ces expériences ont été faites dans les fabriques de câbles en fer de MM. Brunton et Brown. D'après ces résultats et les calculs de M. Barlow (1), l'arche du milieu du pont projeté à Runcorn

(1) *Voyez* ci-dessus (art. 24) le calcul dont il s'agit.

par M. Telford, sur 1 000 pieds d'ouverture, pourrait supporter une charge de 1 462 tonnes avant que les chaînes ne rompissent : le poids du pont lui-même, non compris les fardeaux qu'il peut avoir à supporter, est évalué par M. Telford à 573 tonnes. De la possibilité de l'exécution de ce dernier pont, on conclut à plus forte raison celle de l'arche projetée sur le détroit de Menai, dont l'ouverture est moitié moins grande.

34. *M. Bryan-Donkin, ingénieur civil,* a été témoin d'une partie des expériences faites à la manufacture de M. Brunton, et confirme le résultat annoncé par M. Barlow. Il a examiné le projet de pont pour Runcorn, et ne doute nullement de la sûreté et de la convenance de cette construction. Il décrit la manière dont les chaînes doivent être formées dans ce pont (cette description est conforme à celle donnée ci-dessus d'après l'ouvrage de M. Barlow), et observe qu'aucun appareil mécanique existant ne pourrait offrir le moyen d'essayer par expérience la force d'une chaîne ainsi formée. Il pense que la construction d'un pont de ce genre, confiée à un ingénieur habile et prudent, est très-praticable et d'une exécution facile.

35. *M. Thomas Brunton, propriétaire d'une manufacture de câbles en fer,* décrit les expériences qu'il a faites sur la force du fer, au moyen d'une presse hydraulique qui peut produire un effort de 250 tonnes [254 000^k]. Un pouce circulaire en fer porte moyennement de 22 à 24 tonnes [44 à 48^k par millimètre carré], suivant sa qualité, et surpasse très-rarement ce dernier nombre. Les expériences ont indiqué que la force du fer augmentait avec la grosseur ; une barre de 2 pouces de diamètre portant de 95 à 100 tonnes, et quelquefois jusqu'à 103 tonnes. M. Brunton regarde un barreau carré comme étant plus fort de $\frac{1}{5}$ qu'un barreau rond dont le diamètre serait égal au côté du carré. Les barreaux de deux pouces de diamètre sont les plus forts qu'il ait essayés. Il pense qu'avec du soin, des barres peuvent être soudées les unes au bout des autres, de manière que la soudure soit aussi solide que toute autre partie ; et il croit que des barreaux carrés peuvent être aussi bien soudés que des barreaux ronds. Il ne voit aucune difficulté à mettre un grand nombre de barres les unes à côté des autres, de manière que l'effort se trouve également réparti sur toutes ; et il observe que si une des barres se trouvait plus chargée, elle s'étendrait jusqu'à ce que toutes le fussent également. Interrogé s'il regarde comme praticable la formation d'un câble en fer, en réunissant un certain nombre de barreaux, de manière à acquérir une force donnée, M. Brunton répond qu'il lui paraît douteux que l'on puisse bien souder les barres de fer, quand il s'agit d'une aussi grande longueur que 500 pieds, parce qu'une pièce de fer, pour être bien soudée, doit être tournée et présentée de tous côtés sous le marteau, et qu'il est impossible de tourner une pièce de fer de 500 pieds de longueur. Supposant même que l'on inventât des appareils à cet effet, il ne croit pas qu'elle pût être tournée aussi

rapidement qu'il est nécessaire pour que la soudure soit bien exécutée. Cette objection est d'ailleurs la seule qu'il ait à faire.

M. Brunton donne ensuite quelques détails sur la fabrication de ses câbles en fer. Ces câbles sont formés par des chaînes; les plus grands, destinés aux vaisseaux de guerre du premier rang, doivent servir à supporter un effort de 200 tonnes [203 200^{k}]. Le diamètre du fer des chaînons est de 2 pouces $\frac{1}{8}$[0^{m},054] : on éprouve la chaîne en la soumettant à une tension de 110 tonnes [111 730^{k}]; et, d'après la grosseur du fer, on la regarde avec d'autant plus de raison comme capable de supporter 200 tonnes, que cette chaîne, que l'on pourrait éprouver sous une tension de 150 tonnes [152 400^{k}], doit être considérée comme ayant une force à peu près double de celle du fer des chaînons. La longueur des câbles est de 900 pieds [274^{m}]; on les partage en parties de 75 pieds [23^{m}] de longueur, que l'on essaie séparément au moyen d'une machine. La fabrique de ces câbles n'offre aucune difficulté, et depuis cinq ans qu'elle est établie, il n'y a pas d'exemple d'une rupture. M. Brunton regarde l'exécution d'un pont avec des câbles en chaînes comme plus sûre qu'en employant des barreaux soudés les uns au bout des autres, parce qu'on peut essayer la force des premiers, tandis que cela est impossible pour les autres. Il parle de la difficulté que l'on éprouve à souder des barres en fer plat de 6 pouces de largeur sur $\frac{3}{4}$ de pouce d'épaisseur, quand la longueur surpasse 32 pieds, et observe que de semblables barres étant soulevées par une extrémité ne peuvent supporter leur propre poids et rompent dans les soudures. Interrogé enfin sur les différences de force relative que peuvent présenter des fers de diverses grosseurs, il répond que du fer de 2 pouces de diamètre est plus fort que celui de $\frac{1}{2}$ pouce ou 1 pouce; mais que cet accroissement de force avec la grosseur a une limite; qu'au-delà de 2 pouces $\frac{1}{4}$ ou 2 pouces $\frac{1}{2}$, le fer, étant moins comprimé en passant sous les cylindres, a moins de ténacité que celui d'un moindre échantillon.

36. *M. Bryan-Donkin*, examiné de nouveau, ayant sous les yeux les plans de M. Telford, est convaincu qu'un pont de ce genre peut être exécuté avec une entière sécurité. Interrogé spécialement sur la possibilité de souder solidement les barres de fer pour former un câble d'une grande longueur, il énonce l'opinion que les soudures d'un câble de cette espèce peuvent être faites avec autant de solidité qu'il est nécessaire, eu égard à l'effort auquel il serait exposé. Il ne lui est resté aucune inquiétude après avoir assisté aux expériences faites chez M. Brunton, où il a vu des barres d'un pied de longueur s'étendre quelquefois de trois pouces avant de rompre. « Le fer, dit-il, a cette propriété » particulière, qu'étant tiré par le moyen d'une machine, un poids donné allonge la » barre : en attendant quelque temps, la barre conserve cette longueur, et il faut un » poids plus grand pour l'étendre davantage; en sorte que, quoique la section transver- » sale de la barre ait diminué, elle supporte néanmoins un plus grandpoids. Il suit

» de là que si quelque barre, dans un pont, se trouvait d'abord exposée à un plus grand » effort que la barre voisine ou qu'aucune autre barre, et était forcée de s'étendre, elle » s'accommoderait bientôt à la longueur commune, et se trouverait alors capable de » porter un plus grand poids qu'elle ne le faisait d'abord. De deux ponts semblables, » supportés par des barreaux soudés ou par des chaînes, le dernier, étant chargé inutile- » ment d'un plus grand poids de fer, serait par cette raison le plus faible. »

37. *M. Fitchett, secrétaire du comité du pont projeté à Runcorn*, rapporte que M. Telford, ayant été choisi par ce comité pour diriger l'exécution du pont, établit dans son rapport qu'il avait fait environ deux cents expériences sur du fer forgé de diverses longueurs, depuis 31 jusqu'à 900 pieds; que le projet offrant une ouverture de 1 000 pieds [305^m], les membres du comité jugèrent à propos de faire faire devant eux une expérience sur cette ouverture même ; que cette expérience eut lieu dans une vallée près de Liverpool, et que les résultats ayant confirmé ou même dépassé les calculs donnés par M. Telford, pour la force du fer relativement à divers degrés de courbure, plusieurs personnes qui avaient conservé des doutes jusqu'à ce moment, se mirent au nombre des souscripteurs; que la souscription s'élève présentement à la somme de 25 000 livres [$562\ 500^f$], et que le bill a été demandé au parlement pendant la session actuelle; mais que l'affaire a été ajournée à la session suivante, parce que la souscription n'est pas encore tout-à-fait remplie, et par quelques autres raisons. M. Fitchett annonce que l'opinion générale du comité est en faveur de la possibilité de l'entreprise, en donnant au pont une ouverture de 1 000 pieds. Il ajoute que la compagnie pour la navigation de la Mersey et de l'Irwel ayant desiré que l'ouverture fût portée à 1 200 pieds [366^m], M. Telford, consulté à ce sujet, a répondu qu'il ne voyait pas plus de difficulté à exécuter le pont sur cette dernière ouverture, mais qu'il en résulterait une augmentation de dépense. Le comité discute encore à présent la convenance de l'un ou de l'autre parti, aussi bien que quelques autres modifications à la disposition des ouvrages.

38. *M. Chapman, ingénieur civil*, connaît le projet du pont de Runcorn. Il a fait des expériences sur la force du fer en divers endroits, et spécialement à Newcastle. Les barres de $\frac{1}{2}$ pouce carré ont porté de 5 à 10 tonnes chacune; et d'après les résultats donnés par M. Barlow, elles portent près de 6 tonnes à 6 tonnes $\frac{1}{2}$. Il regarde 6 tonnes comme la force moyenne d'un fer passablement bon [38^k par millimètre carré]; mais il observe que le fer commencera à s'allonger sous un effort qui surpassera peu la moitié de celui-ci. Il lui paraît par conséquent que 3 tonnes pour une barre de $\frac{1}{2}$ pouce carré [19^k par millimètre] sont une charge suffisante, en supposant même le fer d'une bonne qualité, et qu'il serait prudent de se borner à 2 tonnes [13^k par millimètre]. M. Chapman indique ensuite les résultats de divers calculs sur des ponts suspendus dont le plancher

serait supporté par une courbe, ou par des tiges rectilignes inclinées. Il trouve cette dernière disposition plus économique que la première dans le rapport de 1 à 3 environ; mais il observe qu'il faudrait employer beaucoup de fer dans le plancher, pour le rendre capable de soutenir l'effort horizontal auquel il est exposé, effort qui diminue progressivement des extrémités au milieu (1). Il ne doute point d'ailleurs que l'une ou l'autre de ces dispositions ne puisse être employée avec sécurité pour un pont de 500 pieds d'ouverture, et qu'en réglant convenablement la quantité de fer, le projet de M. Telford ne puisse offrir une parfaite sécurité pour le passage du bétail ou des voitures. La soudure des fers ne lui paraît présenter aucune difficulté, parce qu'une barre de ½ pouce est très-flexible sur une longueur de 30 ou 40 pieds, et peut facilement être tournée sur cette longueur d'un demi-tour, ce qui est suffisant. Il ne pense pas que les points de suspension soient exposés à s'écraser sous le poids des fers, et ajoute que le mode de combiner les fers en joignant les barres dans le sens de la longueur et les assemblant ensuite les unes à côté des autres sans les souder, lui paraît mériter d'être fort approuvé. M. Chapman est d'avis qu'un pont suspendu, construit suivant l'un ou l'autre des procédés dont il s'agit, sera suffisamment fixe pour que les voitures puissent le parcourir rapidement sans danger ou inconvénient; mais il pense que le pont supporté par des liens inclinés serait moins sujet aux ondulations. Il ne croit pas qu'un pont tel que celui proposé par M. Telford, s'il est convenablement établi, ait un mouvement bien sensible pour une personne qui le parcourrait en voiture. Interrogé s'il a connaissance du calcul d'après lequel le pont de Runcorn serait capable de supporter un poids de 900 tonnes au-delà du sien propre, il répond affirmativement. Il annonce enfin qu'il a calculé la charge que produirait un troupeau de bétail occupant entièrement le pont d'une extrémité à l'autre, et qu'il l'évalue à environ 330 tonnes [335 280^k]. En supposant une troupe d'hommes ou un corps militaire marchant en colonne serrée, il pense que le pont pourrait contenir environ 2 000 hommes, qui, à raison de 16 *stones* [102^k] chacun, peseraient à peu près 200 tonnes [203 200^k].

39. *M. Barlow* présente un calcul de la force du pont suspendu projeté sur le détroit de Menai, dont voici la traduction :

« Une des plus importantes données de ce calcul est la force de cohésion du fer forgé.

» Il paraît, par le résultat de diverses expériences faites par M. Telford et autres, » par MM. Brunton et compagnie, et par le capitaine Brown, ces dernières ayant été » effectuées en ma présence, que la force moyenne de ce métal est d'environ 27 tonnes

(1) On trouvera dans la deuxième partie de ce Mémoire l'examen des ponts de cette espèce, et la comparaison avec les ponts supportés par des chaînes. *Voyez* d'ailleurs ci-dessous, article 41, le second interrogatoire de M. Chapman.

» par pouce carré de la section transversale [$42^k,5$ par millimètre carré], et que cette » force, entre certaines limites, est proportionnelle à l'aire de la section. La déviation » apparente de cette règle en faveur des plus grosses barres, mentionnée par M. Brunton, doit plutôt être attribuée au mode d'action particulier de sa machine, qu'à aucune » véritable augmentation dans la force moyenne.

» On doit aussi attribuer à la même cause la supériorité apparente de force des barres » de fer essayées à la manufacture de M. Brunton, sur celles que l'on soumet à l'action » de la machine du capitaine Brown.

» La machine de M. Brunton me paraît exagérer l'action exercée, et celle du capitaine » Brown la diminuer. D'après la première suite d'expériences, la force moyenne d'une » barre d'un pouce carré est 29 tonnes $\frac{1}{4}$, tandis que la seconde donne seulement » 25 tonnes. Je prends le milieu de ces deux résultats pour la force moyenne; c'est-à-» dire 27 tonnes par pouce carré. Les barres sur lesquelles ces expériences ont été » faites, ont varié de moins de 1 pouce à plus de 2 pouces de diamètre. Cette donnée étant » établie, M. Telford desira ensuite vérifier la force du fer attaché à ses extrémités, et » chargé de poids distribués en divers points de la longueur; et il me communiqua les » résultats de ses expériences, pour être insérés dans mon ouvrage sur la force du bois » et du fer. Elles me paraissent avoir été faites avec beaucoup de soin et d'exactitude. » J'ai calculé par la théorie les poids qui devaient produire la rupture : et l'accord entre » la théorie et l'expérience a été très-remarquable; dans quelques cas, la différence » fut au-dessous de $\frac{1}{100}$ du poids employé. Cet accord m'engage à placer une entière » confiance dans les calculs que j'ai faits sur le pont de Runcorn, aussi bien que dans » le calcul suivant, qui se rapporte au pont projeté sur le détroit de Menai.

» La distance entre les piles de ce pont est de 500 pieds, et la flèche de la courbe » de 30 pieds; ce qui exige une longueur de courbe ou barre de 505 pieds. Le poids » de 505 pieds de longueur d'une verge en fer d'un pouce carré est d'environ 1 704 livres, » et produira sur chaque point de suspension un effort de 3 632 livres. L'effort néces-» saire pour rompre la même verge est 27 tonnes, ou 60 480 livres. Une semblable » verge porterait donc un fardeau (en comprenant son propre poids) de 28 372 livres, » distribué uniformément sur la longueur, avant qu'elle pût être rompue. Ce poids, » multiplié par le nombre de pouces carrés compris dans la section de toutes les barres, » donnera le poids extrême que le pont pourrait supporter, ou plutôt le plus petit poids » qui pourrait causer la rupture.

» Je crois que l'on se propose d'avoir quatre câbles, chacun de 15 pouces de sur-» face; ce qui donne une section de 60 pouces pour les quatre : ainsi $28\,372 \times 60 =$ » 17 023 200 livres, ou 760 tonnes, sont le poids total que le pont pourrait rigoureu-» sement supporter.

» M. Telford évalue le poids total du pont de Runcorn (non compris les charges » passagères) à 574 tonnes; et, en prenant la moitié pour le pont de Menai, c'est-à- » dire 287 tonnes, il restera un excédant de force de 473 tonnes : mais cet excédant » peut être augmenté à volonté, en multipliant les barres ou en leur donnant plus de » grosseur. Par conséquent, si le pont est établi conformément au plan présenté, je ne » pense pas que, sous le rapport de la force des matériaux, aucun danger puisse être » appréhendé. A l'égard de l'effort et de la pression sur le sommet des piles, j'ai fait » les calculs suivans.

» La tension étant supposée de 380 tonnes, la pression verticale se trouve de 89 tonnes » (c'est-à-dire 380 × sin. 13° 34′), en tant qu'elle provient de la chaîne de l'arche du » milieu. J'estime (mais je ne l'ai pas actuellement calculé) que la partie du câble qui » passe sur les piles et sert de lien, s'ajustera d'elle-même, en formant un angle d'environ » 20° avec la ligne horizontale passant sur la pile. La pression verticale provenant de » ce lien est par conséquent d'environ 380 × sin. 20° = 130 tonnes; et la pression » verticale totale sur chaque pile sera de 219 tonnes.

» Je pense qu'il n'y aura aucune difficulté à trouver des matériaux capables de résister » à cette pression.

» L'effort horizontal sur les piles, en dedans, est 380 × cos. 13° 34′ = 369 tonnes, » et il est, en dehors, 380 × cos. 20° = 356 tonnes. Il y aura donc un effort hori- » zontal, sollicitant en dedans chaque pile, d'environ 13 tonnes. M. Telford se propose » de résister à cet effort au moyen de deux liens *[pier braces]*, qui évidemment seront » plus que suffisans pour cet objet.

» Le poids de la maçonnerie reposant sur l'assise dans laquelle les extrémités des » câbles seront fixées, doit excéder, autant qu'il sera possible, 130 tonnes; avec un » poids moindre, ces câbles pourraient céder.

» En conclusion, je demande à établir que je ne suis pas compétent pour juger à » quel point la construction est exécutable : mais, en la supposant exécutée, je suis » convaincu, d'après le calcul précédent, que, sous le rapport de la force, il n'y aurait » aucun danger à craindre. *Signé* BARLOW. »

Interrogé si l'on pourrait compter, dans la pratique, sur un pont suspendu chargé d'un poids égal à la moitié de celui que la théorie apprend qu'il pourrait soutenir sans rompre, M. Barlow répond affirmativement. Il ajoute, sur la demande des commissaires, que M. Telford ne lui a fourni aucun renseignement sur la grosseur que cet ingénieur se propose de donner aux chaînes, mais qu'il a adopté dans son calcul une section de 60 pouces, comme étant la plus vraisemblable.

40. *M. John Rennie, écuyer, ingénieur civil,* interrogé s'il a fait quelques expériences pour reconnaître la force du fer, répond qu'il a fait, dix ans auparavant, une suite

d'expériences de ce genre, pour l'usage du bureau de la marine, avec une machine exécutée par le capitaine Huddart; qu'il a reconnu que le meilleur fer qu'il pût se procurer portait de 25 à 26 tonnes par pouce quarré; que très-peu allaient jusqu'à 26 tonnes; que 25 tonnes [39^k,4 par millimètre] pouvaient être considérées comme la force moyenne; qu'en essayant les barres dans la machine, il observa qu'elles s'allongeaient d'une manière extraordinaire, quelques barres de 3 pieds de long sur 1 pouce carré s'étant alongées de 8 pouces avant de rompre. Il a fait aussi quelques expériences avec la machine du capitaine Brown, dont les résultats diffèrent extrêmement peu des précédens. M. Rennie n'a pas fait d'observations spéciales sur les barres de fer composées de parties soudées, mais la pratique lui a appris qu'en général les soudures étoient plus faibles que les autres parties des fers, sans qu'il puisse assigner rigoureusement dans quelle proportion.

Cet ingénieur, sans avoir fait des expériences spéciales sur l'emploi du fer pour l'exécution des ponts suspendus, ne doute pas que les ponts de cette espèce ne doivent réussir complètement, pourvu qu'ils soient suffisamment forts : mais son opinion est qu'on doit leur donner une force bien plus grande, comparativement au poids qui serait nécessaire pour les rompre, que M. Barlow ne l'a établi. Il a reconnu par expérience, sur-tout dans la construction des moulins, que les axes ou autres pièces du mécanisme devaient avoir quatre ou cinq fois la force indiquée par le calcul, pour qu'on pût être assûré de la solidité; et il pense que les cables en fer doivent être capables de soutenir au moins quatre fois le poids qu'ils sont exposés à supporter. Eu égard à la difficulté de s'assurer que les jonctions d'un grand nombre de pièces, soudées les unes au bout des autres, sont toutes également bien exécutées, il lui paraît que, tout compensé, une chaîne de même poids offrirait plus de sécurité : elle aurait de plus cet avantage, que l'on pourrait enlever une partie qui se trouverait défectueuse, et la réparer, sans déranger le pont. M. Rennie pense qu'une faible courbure dans la chaîne est plus convenable pour le pont, mais que cette chaîne doit alors être plus forte. Il ne croit pas qu'il y ait aucune difficulté à construire les piles de manière qu'elles aient assez de force pour supporter un pont, quelque grand qu'il soit; mais les dimensions que la théorie pourrait indiquer à cet effet, seraient trouvées fort insuffisantes dans la pratique.

M. Rennie donne quelques indications relatives à des ponts suspendus construits en Amérique (il en a été fait mention précédemment). Il croit que les ponts de cette espèce peuvent être établis sans danger ou inconvéniens pour les passagers, provenant de leur défaut de fixité. Il ne pense pas qu'aucun accident pût résulter de l'action du vent sur le pont projeté dans le détroit de Menai. La dépense des ponts suspendus doit, suivant lui, être, dans certaines situations, beaucoup moindre que celle des arches en fer fondu; et il regarde l'introduction de ces nouveaux ponts comme très-avantageuse à l'État.

41. *M. Chapman, appelé de nouveau*, rectifie le calcul qu'il avait présenté pour la comparaison des ponts suspendus soutenus par des chaînes ou par des liens inclinés. En supposant un pont de 500 pieds d'ouverture, avec une flèche de 25 pieds, il trouve que si les chaînes exigeaient 92 tonnes de fer, les liens inclinés emploieraient environ 55 tonnes, et les pièces placées dans le plancher pour maintenir ces liens, environ 26 tonnes; ce qui forme un total de 81 tonnes, différant peu de la quantité précédente. Le pont formé par des liens inclinés serait moins sujet que l'autre aux ondulations.

Interrogé sur la proportion d'après laquelle il croirait convenable de régler la grosseur des fers pour un pont suspendu, eu égard à la force nécessaire pour les rompre, il répond qu'il ne voudrait pas leur faire porter plus du tiers du poids qui causerait la rupture, et qu'il préférerait ne leur en faire supporter que le quart.

42. *M. Brunton, introduit de nouveau*, annonce qu'il a trouvé un moyen de réunir entre elles des barres avec des boucles, de manière que les assemblages soient aussi forts, ou plus forts, que toute autre partie. Il pense que des barres ainsi réunies peuvent, à poids égal, présenter autant ou plus de force que les câbles.

Le reste des papiers se compose de diverses lettres et réclamations relatives à la navigation du détroit de Menai, qui n'ont pas de rapport avec l'objet de ce mémoire.

43. D'après le résutat de cette enquête, l'exécution du pont projeté par M. Telford a été ordonnée : de nouveaux papiers, publiés par l'ordre de la chambre des communes en juin 1823, font connaître l'état actuel de cette entreprise, et diverses altérations faites au premier projet.

1.° Les chaînes de retenue, qui devaient être simplement fixées dans la masse de la maçonnerie des culées, sont prolongées dans le rocher sur plus de 60 pieds [18^{m}] de longueur, et à plus de 40 pieds [12^{m}] au-dessous de la surface du sol, en sorte que ces chaînes embrassent une masse bien plus que suffisante pour faire équilibre à l'effort du pont. Les chaînes de retenue forment avec la verticale, à l'extrémité supérieure des supports, le même angle que les chaînes de suspension; et comme les chaînes peuvent glisser sur les supports, ces derniers ne seront exposés à aucune action horizontale.

2.° La hauteur des supports a été portée de 37 à 50 pieds [$11^{m},3$ à $15^{m},2$] au-dessus du niveau de la route, afin de diminuer la tension des chaînes. Ce changement a obligé à construire les pyramides servant de supports en pierre avec des liens en fer, au-lieu des châssis en fer fondu qui avaient été projetés.

3.° La quantité du fer a été considérablement augmentée, soit par l'allongement des chaînes de retenue, soit parce qu'on a donné plus de force à ces chaînes et aux chaînes de suspension.

M. Telford a toujours pensé, d'après les résultats d'expériences nombreuses, et les

commissaires de la chambre des communes sont disposés à partager cette opinion, que les chaînes projetées avaient une force suffisante. Les changemens dont on vient de parler ont été faits d'après l'autorité de MM. Davies-Gilbert, Rennie et Barlow. Ces changemens, joints à quelques augmentations dans la dépense de la fondation d'une des piles et dans le travail de l'extraction de la pierre, ont apporté un accroissement considérable à l'estimation qui avait été donnée en 1818 par M. Telford : il paraît que la dépense s'élevera à plus du double du montant de cette estimation.

Le travail de la maçonnerie est entièrement terminé jusqu'au niveau de la route. L'une des pyramides servant de support est en partie élevée. On se prépare à fixer les extrémités des chaînes de retenue, et à poser, à l'aide d'échafauds, dans le courant de l'année 1823, les parties de ces chaînes comprises entre le niveau du terrain et les supports.

Il paraît d'ailleurs, d'après d'autres renseignemens non officiels qui nous ont été donnés, que les chaînes du pont de Menai ne sont pas exécutées d'après le premier projet présenté par M. Telford, et que cet ingénieur a adopté des dispositions analogues à celles employées par le capitaine Brown dans les constructions décrites ci-après.

44. On trouve dans les *Mémoires sur les travaux publics de l'Angleterre*, publiés en 1819 par M. Dutens, inspecteur divisionnaire des ponts et chaussées, le dessin d'un petit pont construit sur la Dée, près de Langollen, et composé de trois travées de 11^{m},4 d'ouverture chacune. Les chaînes sont tendues presque en ligne droite au-dessous du plancher. La disposition générale et les détails de la construction, dont la date n'est point indiquée, sont très-défectueux.

45. M. Dutens donne également, dans son utile ouvrage, le dessin d'un pont en chaînes, établi pour servir de modèle ou d'essai dans les ateliers du capitaine Brown, à Londres. La longueur de ce pont, sur lequel pourraient passer des voitures légères, est de 30^{m},5. Les pièces des chaînes sont en fer plat posé de champ.

46. Le capitaine Samuel Brown, principalement connu par ses fabriques de câbles en fer pour la marine, est l'auteur du pont construit sur le Tweed, à environ 5 milles au-dessus du port de Berwick. Ce pont a été commencé en août 1819, et livré au public le 26 juillet 1820. La planche II en représente la disposition générale. La figure 1 est l'élévation latérale; la figure 2, le plan; la figure 3, une section transversale, en regardant du côté du pilier situé sur la rive gauche; la figure 4, le plan de ce pilier; la figure 5, une autre section transversale, en regardant du côté de la construction adossée au rocher sur la rive droite; la figure 6, le plan du petit bâtiment qui est au pied de cette constrnction. La planche III offre les détails du même pont : le côté gauche de la figure 1 est une section verticale suivant l'axe du pont; et le côté droit de la même figure, une élévation latérale, dans l'endroit où les chaînes sont le plus

basses; la figure 2 est une section transversale faite dans le même endroit; le côté gauche de la figure 3 est le plan d'une portion du plancher, en supposant les madriers enlevés; le côté droit de cette figure est le plan de la même portion, avec les madriers et les bandes de fer qui les recouvrent. Nous suivrons ici la description donnée par M. Stevenson dans le n.° X de l'*Edinburgh philosophical Journal.* Mais ayant visité le pont en octobre 1821, et pris sur les lieux les dessins et les mesures de toutes les parties qui ne sont point cachées dans les massifs de maçonnerie ou dans la terre, nous pourrons compléter cette description par de nouveaux détails.

Le plancher est en bois de sapin, et recouvert de bandes de fer sous la trace des voitures (planche III, figures 2 et 3) : il a $5^m,49$ de largeur entre les parapets, et 110 mètres de longueur entre les culées. Les solives ont $0^m,38$ de hauteur, et $0^m,18$ de largeur. L'épaisseur des madriers est de $0^m,076$. Cette grande plate-forme est suspendue à 8 mètres au-dessus des basses eaux de la rivière. Elle s'élève, suivant M. Stevenson, d'environ $0^m,6$ au milieu du pont, et est terminée de chaque côté par une corniche de $0^m,4$ de hauteur, qui sert d'ornement, et ajoute à l'apparence de force de la construction. Nous n'avons pu mesurer exactement la convexité du plancher: mais la flèche de la courbure nous a paru au-dessous de $0^m,6$; et il est à croire que cette flèche a diminué depuis l'époque de la construction, par l'effet du passage des voitures. L'intervalle des parapets est partagé en trois parties : les deux parties latérales, réservées aux piétons, ont chacune $0^m,91$ de largeur; le milieu, destiné aux voitures, en a $3^m,66$. Cette partie est séparée des deux autres par des bouteroues en fer fondu de $0^m,12$ de largeur et de hauteur, représentés figures 7 et 8, planche VI, et recouverte par des bandes de fer d'environ $0^m,006$ d'épaisseur, placées longitudinalement sous la trace des roues, et transversalement sous le passage des chevaux.

47. Le plancher est suspendu aux chaînes par des tiges en fer rond de $0^m,025$ de diamètre, retenues à l'extrémité supérieure de la tige dans des espèces de chapeaux en fer fondu (*voyez* les figures 1, 2 et 3, planche VI). Le fer devient carré, augmente de grosseur à cette extrémité, en forme de queue d'hyronde, et pénètre dans une ouverture pratiquée dans le chapeau, ouverture dans laquelle la tête de la tige entre de bas en haut, et où l'on place ensuite une petite cale en fer qui achève de la remplir, et empêche que la tige ne puisse descendre. La forme du chapeau, qui repose sur les assemblages des chaînes, est assez compliquée, parce que ce chapeau est en même temps destiné à recevoir les têtes des tiges, et à maintenir, en faisant fonction d'entre-toise, les situations respectives des pièces des chaînes sur lesquelles il repose. Il y a à cet effet, en dessous, des appendices qui pénètrent dans les intervalles de ces pièces. La figure 1, planche VI, et le côté droit de la figure 2, représentent l'élévation latérale et le plan de l'assemblage des chaînes supportant le chapeau. Le côté gauche de la figure 2 est le plan de l'assem-

blage, en supposant le chapeau enlevé. Le côté droit de la figure 3 est une section transversale faite au-devant d'un assemblage; et le côté gauche de la même figure, une section transversale faite au milieu. Les hachures verticales distinguent les sections faites dans le fer fondu.

Les extrémités inférieures des tiges de suspension, faites avec du fer plus fort, de $0^m,032$ de grosseur, sont terminées en fourchette (*voyez* figures 1, 2 et 3, planche III); elles embrassent une barre en fer plat posée de champ, de $0^m,076$ de hauteur, qui court dans toute l'étendue du pont, et sur laquelle portent les solives du plancher. Des clavettes passées sous la barre la fixent à ces fourchettes. On voit, dans les figures 1 et 3, les assemblages des pièces dont cette barre est composée. Le plancher du pont est donc entièrement soutenu sur deux fermes, éloignées l'une de l'autre de $5^m,49$.

48. Les chaînes sont au nombre de douze, disposées par paires, et placées de chaque côté du pont sur trois rangs situés dans un même plan vertical, et espacés d'environ $0^m,5$ (*voyez* les planches II et III). Ces chaînes, aussi bien que toutes les autres parties en fer forgé de la construction, sont faites du meilleur fer du pays de Galles. Les barres dont elles sont composées sont en fer rond, de $0^m,051$ de diamètre. Les chaînons ont $4^m,55$ de longueur, mesurée entre les milieux des assemblages, et portent à leurs extrémités des boucles fortement soudées (*voyez* les figures 1, 2 et 3, planche VI). Ces chaînons sont assemblés au moyen d'anneaux en fer carré de $0^m,031$ de grosseur, et de boulons passés dans les boucles et les anneaux, de forme ovale, dont le diamètre horizontal est de $0^m,063$, et le diamètre vertical de $0^m,057$. Ces boulons ont à un bout une tête, et à l'autre une clavette avec une rondelle. Les nœuds des chaînes, chargés des chapeaux qui portent les tiges de suspension, sont disposés de manière que ces tiges sont alternativement suspendues aux trois rangs des chaînes, la première tige étant attachée au rang inférieur, la seconde au rang du milieu, la troisième au rang supérieur, et ainsi de suite. Il résulte de cet arrangement, que toutes les chaînes supportent un égal effort, et que les chaînons ne tendent point à être fléchis, mais sont seulement sollicités dans le sens de la longueur. L'intervalle des tiges de suspension est, au milieu du pont, le tiers de la longueur des chaînons, c'est-à-dire de $1^m,52$. Cet intervalle diminue un peu en approchant des culées, en raison de l'inclinaison des chaînes.

49. Quoique la longueur du plancher soit seulement de 110 mètres, la distance des points des piliers où aboutissent les chaînes est de $131^m,7$. La flèche de la courbe est d'environ 8 mètres. Les six chaînes principales, avec leur appareil, pèsent environ 5 tonnes [$5\,080^k$] chacune, et le poids du pont entier, entre les points de suspension, a été estimé de 100 tonnes [$101\,600^k$].

50. Sur la rive gauche de la rivière, du côté de l'Écosse, les chaînes passent sur

un pilier en maçonnerie, ayant 18 mètres de hauteur et 10 mètres de largeur, sur $6^{m},5$ d'épaisseur au niveau du plancher. La largeur de l'arcade ouverte dans ce pilier, qui sert d'entrée au pont, est de $3^{m},66$. Chaque paire de chaînes passe au travers d'ouvertures correspondantes pratiquées dans la maçonnerie à $0^{m},6$ d'intervalle les unes au-dessus des autres, et repose sur des rouleaux scellés dans la pierre; les chaînons sont faits, dans cette partie de la chaîne, aussi courts qu'il a été possible, afin qu'ils puissent s'appuyer sur les rouleaux sans que le fer soit exposé à être fléchi. Après avoir traversé le pilier, les chaînes sont prolongées vers le sol dans une direction inclinée, y pénètrent jusqu'à la profondeur de $7^{m},3$, et traversent aux extrémités de grandes plaques en fer fondu, auxquelles elles sont fixées par un fort boulon de forme ovale, ayant $0,^{m}076$ sur $0^{m},088$ de grosseur. Ces plaques ont $1^{m},83$ de longueur et $1^{m},52$ de largeur; l'épaisseur est au centre de $0^{m},127$, et se réduit vers les bords à $0^{m},064$. Les extrémités des chaînes, ainsi fixées, sont chargées de pierres meulières et d'autres matériaux jusqu'au niveau de la route. On voit paraître à la surface du sol une maçonnerie grossière en pierres sèches, et il n'y a rien pour garantir le bas des chaînes.

51. Sur la rive droite du Tweed, du côté de l'Angleterre, le pilier de maçonnerie sur lequel portent les chaînes, est établi dans une excavation faite dans un rocher escarpé, formé d'un grès tendre, légèrement coloré en rouge. Les piliers sont construits avec une pierre de même nature, mais de meilleure qualité. La hauteur du pilier de la rive droite est d'environ 6 mètres, et la figure en est semblable à celle de la partie supérieure du pilier élevé sur la rive opposée. On a construit au-devant de la base un bâtiment orné d'un petit portique, servant de logement au percepteur du péage. Les chaînes s'appuient sur des plaques de fer fondu encastrées dans la maçonnerie, et non sur des rouleaux, comme du côté opposé. Les grandes plaques en fer fondu fixées à l'extrémité des chaînes sont des mêmes dimensions que celles décrites ci-dessus; mais au lieu d'être, comme ces dernières, enfoncées dans le sol, elles sont plutôt situées au-dessus de la fondation du pilier, où elles sont posées presque verticalement, et dans une direction correspondante à celle de l'effort ou de la tension provenant du poids du pont. Pour plus grande sûreté, ces plaques portent contre un arc horizontal en maçonnerie, encastré à queue d'hyronde dans le roc. M. Stevenson, en donnant ces derniers détails, observe que cette partie de la construction n'était pas finie lorsqu'il en fit la visite, à l'époque de l'ouverture du pont; elle est présentement entièrement cachée, et on peut voir seulement, de la corniche du pilier, les barres des chaînes se courber légèrement en pénétrant dans la maçonnerie.

52. Les figures 4, 5 et 6 de la planche VI représentent le détail de la construction des parapets, dont la hauteur totale est de $1^{m},5$ dans les parties où ils ne sont point interrompus pour faire place aux chaînes. Ces parapets sont formés par les tiges de

suspension, qui servent de montans, par d'autres montans verticaux placés au milieu des intervalles de ces tiges, et par plusieurs cours de lisses horizontales. Les montans, aussi bien que les lisses, sont en fer rond de $0^m,025$ de diamètre : il faut excepter toutefois la lisse inférieure qui court dans toute la longueur du pont, et les lisses supérieures; elles sont en fer plat, ayant $0^m,045$ sur $0^m,013$ de grosseur. Les tiges de suspension passent au travers des lisses, dans des ouvertures circulaires pratiquées à cet effet; mais les montans intermédiaires portent au contraire des ouvertures dans lesquelles passent les lisses horizontales, en sorte que c'est par ces derniers montans que ces lisses sont supportées.

53. M. Stevenson rend compte de la manière suivante de la force des chaînes du pont du Tweed, comparée à la charge qu'elles sont exposées à soutenir. Après avoir cité des expériences faites dans les établissemens pour la fabrique des câbles en fer de MM. Brunton et Brown, à Londres, dont il résulte qu'une barre ayant environ 2 pouces de diamètre exige, pour être rompue, un effort de 92 tonnes [46^k par millimètre carré], il observe que le calcul de la solidité d'une construction de ce genre doit être établi dans des cas extrêmes, tels que ceux où le plancher serait chargé d'une foule de personnes ou d'un troupeau de bétail. Le premier cas lui paraît le plus dangereux, en même temps qu'il produit la plus grande charge : une surface donnée, occupée par des hommes serrés les uns contre les autres, est plus chargée que la même surface occupée par du bétail dans le rapport de 9 à 7, il est d'ailleurs plus facile de régler la marche d'un troupeau, que celle d'une foule de peuple attirée par quelque motif d'intérêt. Un exemple remarquable de la difficulté de contenir la foule s'est présenté à l'ouverture du pont du Tweed en 1820. Les spectateurs ayant rompu toutes les barrières, et s'étant précipités sur le pont, on jugea qn'il s'était trouvé à-la-fois sur le plancher environ sept cents personnes. Évaluant le poids de chacune à 150 livres [68^k], on aura 47 tonnes; et comme le poids du pont, entre les points de suspension, est évalué à 100 tonnes, les chaînes supportaient alors une charge totale de 147 tonnes. L'inclinaison des extrémités des chaînes sur l'horizon étant d'environ 12°, cette charge produisait une tension de 370 tonnes, tandis que les douze barres, de 2 pouces de diamètre chacune, n'auraient pu être rompues que par une tension de $12 \times 92 = 1\,104$ tonnes.

54. Ce pont est situé dans un lieu éloigné des habitations; la vallée du Tweed est étroite, et les côteaux escarpés qui la terminent sont couronnés de verdure. L'œil est frappé de la grandeur, de la légèreté et de l'élégance de la construction ; et ce n'est pas sans raison, comme l'observe M. Stevenson, qu'elle a été comparée à un arc-en-ciel renversé. C'est le premier pont suspendu établi en Angleterre pour le passage des voitures. L'exécution de cet ouvrage est due aux efforts entreprenans de M. Molle, et de quelques autres personnes des comtés voisins de Berwick et de Northumberland. La totalité des

travaux de maçonnerie, charpente et ferrure, a été soumissionnée par le capitaine Brown pour environ 5 000 livres [126 000^f], tandis qu'un pont de pierre aurait coûté au moins le quadruple de cette somme. Il paraît toutefois que cet ingénieur n'a pas même espéré être remboursé de ses dépenses, et que son principal objet a été de donner un exemple de l'application des câbles en fer à la construction des ponts. La compagnie des actionnaires a fait depuis au capitaine Brown un présent de 1 000 guinées [26 500^f], indépendamment du prix convenu (1).

55. La description précédente et les dessins paraissent donner une connaissance suffisante de la construction du pont du Tweed. Nous ajouterons quelques observations faites sur les lieux mêmes, et relatives aux effets qui se produisent lors du passage des voitures.

Quoiqu'il ne soit pas situé sur une grande route, ce pont est assez fréquenté, parce qu'il sert à l'exploitation des mines et des usines du voisinage. J'y ai vu passer un grand nombre de chariots chargés de charbon, et attelés d'un, de deux ou de trois chevaux; j'ai observé trois chariots attelés de deux chevaux qui se suivaient immédiatement, et qui se sont trouvés à-la-fois sur le pont, où la circulation est entièrement libre. Lors du passage des voitures, il se produit des effets de différente nature : le plancher du pont fléchit, parce que, la présence de la voiture changeant la distribution des poids supportés par les chaînes, ces chaînes doivent prendre une nouvelle figure, différente de leur figure naturelle, et convenable au nouvel état d'équilibre qui tend à s'établir. Il résulte de cette circonstance que la ligne tracée par le plancher est modifiée continuellement pendant toute la durée du passage, l'endroit où est située la voiture s'abaissant, tandis que les autres parties s'élèvent. Cet abaissement commence à se manifester lorsque la voiture est entrée sur le pont; il augmente progressivement, jusqu'à ce qu'elle arrive au milieu, diminue ensuite, et disparaît entièrement quand la voiture atteint l'autre extrémité. Ces changemens de figure dépendent de la longueur du pont, de la courbure

(1) Le tarif pour la perception du péage est comme il suit :

Pour une personne à pied	0^l	0^s	1^d,	ou 0^f,058.
un cheval attelé à une voiture suspendue	0.	1.	0.	1, 161.
un cheval attelé à un chariot	0.	0.	3.	0, 174.
un cheval non attelé, chargé ou non	0.	0.	6.	0, 348.
un âne, chargé ou non	0.	0.	2.	0, 116.
vingt bœufs	0.	1.	8.	2, 091.
vingt veaux, brebis ou porcs	0.	0.	10.	0, 581.

Il existe dans le voisinage un gué où les voitures traversaient la rivière avant l'établissement du pont : il est maintenant défendu d'y passer, sous peine d'amende.

des chaînes, et du rapport du poids du plancher au poids de la voiture : on peut les prévoir et les évaluer exactement par le calcul. Dans le pont du Tweed, l'abaissement produit par une voiture attelée d'un seul cheval est presque insensible; mais on aperçoit distinctement la flexion mobile du plancher, quand il est parcouru par une voiture plus chargée, ou quand il s'y trouve plusieurs voitures en même temps.

56. Outre les changemens de figure dont on vient de parler, et qui doivent être considérés comme un effet statique résultant de la flexibilité des chaînes et du plancher, il se produit des effets dynamiques, dont les uns résultent également de la flexibilité de la construction, et les autres sont dus à l'élasticité des matériaux. Les petites secousses provenant du roulage des voitures et de la marche des chevaux ne communiquent pas de mouvement horizontal sensible au plancher, et, quoiqu'il ne s'y trouve aucune pièce dirigée diagonalement pour faire fonction de contrevent, on ne remarque rien qui puisse faire présumer que de semblables pièces eussent été utiles. Mais ces secousses se transmettent par les tiges de suspension aux chaînes, qui prennent toujours, lors du passage des voitures, un très-petit balancement horizontal. Le vent, lors même qu'il est faible, occasionne un balancement semblable; en sorte que ces chaînes, qu'on peut regarder comme de longs fils très-flexibles, ayant beaucoup de masse sous un petit volume, sont presque toujours en mouvement. La distribution des poids qu'elles supportent détermine bien, en effet, la courbe que les chaînes doivent décrire dans le plan vertical où elles sont situées; mais, l'état d'équilibre ainsi formé n'étant point altéré sensiblement lorsque les points des chaînes s'écartent très-peu de part et d'autre de ce plan, l'action la plus légère suffit pour faire naître de semblables déplacemens. Ces oscillations paraissent facilitées dans le pont du Tweed par l'isolement des cours d'anneaux dont les chaînes sont formées, et il est vraisemblable qu'elles seraient moindres, si, en réunissant de chaque côté du pont les six rangs d'anneaux, on en eût formé un faisceau qui aurait eu moins de flexibilité. Les mouvemens dont il s'agit font balotter les tiges de suspension dans les ouvertures circulaires pratiquées pour leur passage dans les lisses horizontales du parapet; et il en résulte un bruit de ferraille désagréable, et qui inquiète jusqu'à ce qu'on en ait reconnu la cause. La disposition adoptée pour le parapet semble aussi avoir apporté beaucoup de gêne lors de la pose du pont, une grande partie des tiges de suspension n'étant pas bien verticales, et se courbant en pénétrant dans les lisses de ce parapet. Les mouvemens dont on vient de parler ne paraissent toutefois avoir rien de contraire à la solidité de la construction.

57. Le passage des voitures et des animaux produit aussi dans les chaînes des oscillations qui ont lieu dans le plan vertical où ces chaînes sont placées. Pour s'en former une idée exacte, on peut concevoir d'abord un fil parfaitement flexible et inextensible, attaché à deux points fixes, et chargé de poids distribués sur la longueur. Ce fil

prendra de lui-même une figure dépendante de la distribution des poids. Si l'on vient à rompre cet état d'équilibre en poussant un ou plusieurs points sans les écarter du plan vertical où ils sont placés, et qu'on abandonne ensuite le fil à lui-même, tous les points oscilleront dans le même plan, jusqu'à ce que les résistances aient anéanti le mouvement imprimé, et ramené le fil dans la première situation. En admettant de plus que le fil soit élastique, c'est-à-dire qu'il puisse s'allonger un peu quand on le tend, et revenir à la longueur primitive quand il est déchargé, l'effet d'un mouvement imprimé dans une partie du fil sera d'y faire varier la tension, et par suite de faire naître dans les points de ce fil des mouvemens de vibration, qui auront lieu dans le sens de la longueur, et en même temps que les oscillations dont il vient d'être question. Les chaînes des ponts suspendus étant flexibles, et le fer dont elles sont formées étant élastique, elles doivent offrir, et elles offrent effectivement des effets semblables à ceux dont il s'agit, mais plus compliqués toutefois qu'ils ne le seraient dans un fil parfaitement homogène. Lorsqu'une voiture parcourt le pont du Tweed, le cheval allant même au pas, elle produit une trépidation dont on s'aperçoit peu si l'on marche, mais qui devient très-sensible si l'on s'arrête, et qui est assez forte pour empêcher une personne debout et en repos d'écrire ou de dessiner. Le mouvement cesse aussitôt que la voiture atteint la culée. Ces vibrations, dues à l'élasticité du fer, peuvent être mises en jeu par la moindre force; la marche d'un homme, et même le trot régulier d'un chien de moyenne taille, suffisent pour en faire naître; elles sont alors extrêmement faibles, mais ne sont pas tout-à-fait insensibles quand on les observe avec attention.

58. Si l'on se représente les divers mouvemens dont il vient d'être question, c'est-à-dire les flexions variables du plancher provenant du poids des voitures qui en parcourent la longueur, les balancemens horizontaux, les oscillations verticales et les vibrations longitudinales des chaînes, comme s'accomplissant en même temps, sans se nuire les uns aux autres, on aura l'idée des effets qui se manifestent dans le pont du Tweed. Ils causent d'abord quelque surprise; mais, après un examen attentif, on ne se trouve nullement prévenu contre la solidité de la construction : elle paraît au contraire offrir toute la sûreté que l'on puisse desirer.

Nous avons regardé comme un devoir de consigner ici les observations que nous avons pu faire sur cet ouvrage : l'importance et la nouveauté de ce genre de construction feront peut-être excuser ces détails minutieux. Comme il est possible de soumettre au calcul les modifications dont il s'agit, d'en reconnaître les lois, et la manière dont elles dépendent des dimensions, de la figure et de la masse des ponts, il nous a paru essentiel de constater exactement les effets produits par le passage des voitures sur le seul pont suspendu où l'on puisse encore les observer. L'expérience acquise par la construction de ce pont servira ainsi à éclairer l'établissement de tout autre ouvrage à

qui l'on donnerait des dimensions ou une disposition différentes, et à faire prévoir avec certitude le degré de stabilité et de fermeté qu'il offrira.

59. Postérieurement à l'érection du pont qui vient d'être décrit, le capitaine S. Brown a établi une autre construction en chaînes de fer, dont il a publié lui-même la description dans le n.° XI, avril 1822, de l'*Edinburgh philosophical Journal*, et dont nous avons pris le dessin sur les lieux, en octobre 1821. Nous insérons ici textuellement la description du capitaine Brown. Le lecteur doit consulter la planche IV, dont la figure 1 est l'élévation latérale, la figure 2 le plan, et la figure 3 la section transversale de la construction dont il s'agit.

« *Description de l'embarcadère suspendu de la Trinité, à Newhaven, près d'Edinburgh,* » *par le capitaine Samuel Brown, de la marine royale; contenue dans une lettre* » *adressée à M. Brewster.*

» Mon cher monsieur, j'avais l'intention de vous donner une description du pont » suspendu que j'ai construit sur le Tweed, dans l'été de 1820, lorsque je me suis » trouvé prévenu par M. Stevenson, ingénieur civil, qui était présent à l'ouverture du » pont, le 26 juillet 1820. Comme il a donné le détail des dimensions de la partie » de l'ouvrage qui est en fer, la description des assemblages, celle des piliers ou culées » du pont, il n'est pas nécessaire que j'ajoute rien ici sur ce sujet.

» Il existe cependant quantité de points essentiels qui doivent être connus d'un » architecte ou d'un ingénieur, sur lesquels on ne pouvait espérer que M. Stevenson » se fût étendu, et qui, eu égard à d'autres objets importans, ne peuvent être traités » dans un ouvrage périodique. Je considère en effet l'érection du pont du Tweed et de » l'embarcadère suspendu, comme le prélude de beaucoup d'autres ouvrages du même » genre, tous susceptibles de diverses dispositions, eu égard à leur grandeur, aux charges » qu'ils auront à supporter, et à toutes les variétés que leur arrangement peut offrir. » Je ne doute point que le sujet ne paraisse assez important pour attirer l'attention de » quelques-uns de nos savans écrivains sur la mécanique.

» Sans s'arrêter davantage sur ce qui a été dit auparavant sur le pont du Tweed, il » peut m'être permis de mentionner le fait, plus essentiel que tout autre, que, depuis » l'ouverture de ce pont, on en a été complétement satisfait, et que l'on y a constamment » passé sans aucune restriction, comme on l'aurait fait sur un pont de pierre ou de » fer fondu.

» Le péage, qui n'est pas plus élevé que les droits aux barrières, a rendu dans » la première année au-delà de l'intérêt de l'argent que l'on a dépensé pour la cons» truction, y compris mille livres qui ont été votées pour moi, dans le mois de juin

» dernier, par les commissaires, au-dessus de l'estimation; et il y a tout lieu de croire » que ce péage remboursera en peu d'années la totalité de la dépense.

» Une nouvelle application du même principe vient d'être heureusement terminée » par l'érection de l'embarcadère suspendu dans le golfe du Forth, près d'Edinburgh. » Ce travail a été entrepris aux frais des propriétaires des vaisseaux à vapeur employés » dans le golfe du Forth, et de plusieurs personnes formant une compagnie. A raison » de l'accroissement du commerce dans cette partie de la côte par le moyen des » bateaux à vapeur, il était devenu presque indispensable pour les propriétaires de per- » fectionner les moyens de débarquement; et, comme on ne put parvenir à aucun » arrangement avec les propriétaires de la jetée de Newhaven, il fut proposé par le » lieutenant Crichton, de la marine royale, un des principaux agens de la compagnie » pour la navigation entre Londres, Leith, Edinburgh et Glasgow, au lieu de dépenser » de l'argent à disputer le droit de débarquement à Newhaven, d'ériger le présent » embarcadère. La compagnie aura de durables obligations à cet officier pour les soins » qu'il a donnés à cette entreprise, et pour son habileté et son jugement dans le choix » de l'emplacement.

» Les magistrats d'Edinburgh donnèrent la meilleure preuve de leur approbation du » projet, en consentant à l'exécution dans le lieu désigné par M. Crichton, et en » abandonnant leur droit sur le péage. La compagnie doit aussi de la reconnaissance » à M. Scott, propriétaire d'une partie du rivage, pour le don d'une pièce de terre » considérable pour l'emplacement de la construction, ainsi que pour avoir disposé » les abords, et construit une maison convenable pour la réception des voyageurs. » Ces points essentiels étant arrêtés, je commençai à battre les pieux dans le » mois de mars 1821; mais il y eut une succession de coups de vent violens qui » rendirent cette opération extrêmement difficile et fatigante. Ce ne fut qu'au » commencement de juillet que le pilotis fut entièrement achevé, et prêt à recevoir » les supports.

60. » Le seul perfectionnement que j'aie tenté dans la construction de l'embarcadère, » consiste à employer de fortes barres sur les points de suspension, où l'effort est le » plus grand, et à les diminuer vers le centre, où il est le moindre, mais sans s'as- » treindre toutefois à donner exactement aux barres placées dans chaque partie de la » courbe une grosseur proportionnée à l'effort qu'elles supportent. La longueur est de » 700 pieds [213^{m}], depuis la marque de la haute mer jusqu'à l'extrémité de l'em- » barcadère; la largeur, de 4 pieds [1^{m},22]. Il consiste en trois divisions égales, de » 209 pieds [63^{m},7] chacune, sans aucun support intermédiaire. La hauteur au-dessus » des hautes eaux est de 10 pieds [3^{m},05]. La plate-forme à l'extrémité a 60 pieds » [18^{m},3] de large, sur environ 50 pieds [15^{m},2] de long; et est supportée par quarante-six

» pieux enfoncés d'environ 8 pieds [2^m,44] dans une forte argile bleue. Les têtes des » pieux sont maintenues par des traverses horizontales, et par des moises et des liens » diagonaux, qui servent en même temps à former un grillage solide pour recevoir des » planches de 2 pouces [0^m,051] d'épaisseur. La tête de l'embarcadère regarde le » nord-est, et est exposée au choc de la mer depuis son entrée dans le golfe. Elle doit » supporter aussi le tirage du pont, et, par cette raison, a été fortement consolidée » par des pièces inclinées placées dans diverses directions. Les supports intermédiaires » sont seulement exposés à la pression provenant du poids des divisions correspon- » dantes, et sont considérablement abrités des vagues par la tête de l'embarcadère. Ils » ont par conséquent une étendue suffisante seulement pour former une base solide aux » supports de fer fondu, sur lesquels les principales barres de suspension sont suppor- » tées (toute la charpente est en sapin).

61. » Le support placé sur le rivage est un pilier de pierre, d'une maçonnerie solide, » ayant 6 pieds [1^m,83] en carré, et 20 pieds [6^m,10] de hauteur. Les principales » barres passent sur le sommet de ce pilier, comme sur les supports placés sur les » palées. Les barres de retenue forment un angle de 45°; les extrémités pénètrent d'en- » viron 10 pieds [3^m,05] au-dessous de la surface du sol, et sont retenues dans une » argile ferme par des plaques de fer fondu, sur le principe de l'ancre à champignon » *[mushroom anchor]*. Les autres barres de retenue sont dirigées suivant le même angle, » à partir du support placé sur la tête de l'embarcadère, et sont fixées sur une pièce » boulonnée avec les pieux. Ces pièces sont renforcées par des étais inclinés, dirigés » du côté du rivage, pour résister au tirage du pont.

62. » Les principales barres de suspension portent aux extrémités des boucles de » 2 pouces [0^m,051]; elles ont 1 pouce $\frac{3}{8}$ [0^m,035] et 1 pouce $\frac{3}{4}$ [0^m,045] de » diamètre, étant de différentes dimensions, par la raison mentionnée ci-dessus. Ces » barres sont unies aux extrémités par des boucles latérales et des boulons, d'une force » proportionnée. (*Voyez* les figures 9 et 10, planche VI, qui représentent l'élévation » et le plan des assemblages des chaînes). Elles forment véritablement aujourd'hui une » seule pièce; et, quoiqu'elles soient chacune parfaitement droites, leur réunion prend » la courbe naturelle de l'arc entre les points de suspension; courbe dont la flèche ou » le sinus verse est de 14 pieds [4^m,27] dans chaque division.

63. » Les barres inférieures ont 3 pouces [0^m,076] de hauteur, sur $\frac{3}{4}$ de pouce [0^m,019] » d'épaisseur. Les extrémités passent l'une sur l'autre par des joints à manivelle » *[crank-joints]*, assurés par des boulons. (*Voyez* les figures 3, 4 et 5, planche V, qui re- » présentent le plan, la section transversale et l'élévation d'une partie du plancher.) » Ces barres sont supportées dans une position horizontale par des tiges verticales pas- » sant au travers des joints des principales barres de suspension, et reçoivent les

» traverses du plancher, que l'on a recouvertes avec des planches de 2 pouces [0^m,051]. » Les extrémités des traverses sont maintenues par une corniche et une pièce horizon- » tale prolongées dans la longueur de chaque division. Sur chaque côté est un parapet » en fer forgé, d'environ 4 pieds [1^m,22] de hauteur. Les tiges verticales qui soutiennent » le pont, forment les supports de la lisse.

64. » La grande utilité de l'embarcadère a déjà été reconnue. La force et la durée » de cette construction deviennent par conséquent un objet d'une importance d'autant » plus grande.

» D'après plusieurs centaines d'expériences que j'ai faites avec une machine conve- » nablement disposée sur le principe de la balance ordinaire, j'ai trouvé qu'il fallait une » force de 147000 livres [66656^k] pour rompre une barre ronde de 1 pouce $\frac{1}{4}$ [0^m,044] » de diamètre, tirée dans la direction de la longueur [43^k par millimètre carré] : mais cette » barre commence à s'étendre avec environ les trois cinquièmes de cet effort, lorsque l'ac- » tion s'exerce d'une manière permanente ; et j'ai par conséquent éprouvé les principales » barres de suspension, assemblées comme elles le sont dans le pont, avec 88 200 livres » [40810^k], ou environ 40 tonnes [26^k,3 par millimètre carré]. Mais, ce qui est » beaucoup plus propre à satisfaire le public, le pont a été chargé, depuis son érection, » de 21 tonnes [21336^k], demeurant exposé pendant ce temps au poids ordinaire » des passagers ; ce qui surpasse, suivant toute probabilité, la charge à laquelle il pourra » se trouver exposé dans la suite.

65. » Quant à la sûreté du pilotis, nous avons l'avantage de l'expérience pour » démontrer qu'une construction formée par des pieux profondément chassés dans » un fond solide peut soutenir la violence de la mer, aussi bien que les constructions » en pierre les plus massives. La jetée d'Yarmouth ne requiert aucune réparation, » si ce n'est celle nécessitée par l'altération du bois. L'estacade d'Ostende, sur la » côte opposée, a soutenu pendant des siècles toute la force du vent du nord ; et à » Cronstadt, dans le golfe de Finlande, les batteries sont élevées sur des pieux, comme » sur autant d'îles, et ne souffrent nullement de la violence de la mer. Les pieux sont » donc préférables, dans de semblables situations, à des piles de pierre, parce qu'aucun » vaisseau ne pourrait approcher une masse solide de maçonnerie, sans le danger » le plus imminent d'être mis en pièces, ou submergé par le retour de la vague, » à moins que cette masse ne fût d'une étendue et d'une grandeur telles, qu'elle devînt » un *break-water*. C'est un fait certain qu'aucun vaissea une peut demeurer le long de la » jetée en pierre de Newhaven par un fort vent du nord-est.

» La possibilité de la détérioration des pieux doit être considérée comme une objec- » tion de peu d'importance, puisque ces pieux peuvent être arrachés en tout temps, et » remplacés par d'autres ; et même, d'après les vrais principes économiques, on doit les

» préférer, à raison de leur bon marché, à toute autre construction. Quant à la durée » de la partie du travail en fer, on peut rendre cette partie presque impérissable, en » ayant l'attention de la peindre, comme on le fait ordinairement; et il y a même à » cet égard du remède, puisque chaque chaînon peut être enlevé et remplacé.

66. » L'embarcadère n'offre pas une résistance absolue à la mer; mais la vague se » rompt au travers d'un assemblage de pilots de 60 pieds [18^{m}] en carré, et est tel- » lement affaiblie, que les bâtimens, à moins que le coup de vent ne soit très-violent, » peuvent approcher assez des escaliers pour débarquer les passagers de la manière la » plus commode, et à toute hauteur de marée. Le principe de cette construction, n'étant » pas limité à une certaine distance, peut dans la suite recevoir de plus grands déve- » loppemens; et l'on peut, au moyen d'une suite d'arches suspendues, permettre à des » transports ou à d'autres grands vaisseaux d'aborder, et d'embarquer ou débarquer des » troupes, ce qui épargnerait le délai absolument nécessaire pour entrer dans un port. » Un semblable résultat est à desirer dans toutes les circonstances; mais sous un point » de vue militaire, il devient d'une très-grande importance, puisque le succès d'une » expédition peut dépendre principalement de la rapidité avec laquelle elle est exécutée.

67. » On remplirait un trop grand nombre des pages précieuses de l'*Edinburgh phi- » losophical Journal*, si l'on entrait dans aucune spéculation sur les avantages qu'on peut » obtenir dans la suite par un usage plus général des ponts et embarcadères suspendus. » Mais il y a une destination à laquelle on peut les appliquer, qui n'est pas moins » importante que le salut de beaucoup de naufragés, et la prévention même du plus » affreux des désastres auxquels l'humanité soit exposée.

» Il est bien connu que, quand un bateau a une fois dépassé les brisans, il est regardé » comparativement comme à l'abri du danger, et qu'aucun coup de vent ou aucun » état de la mer ne pourrait empêcher nos marins de Deal d'essayer de sauver un » vaisseau en détresse. Toute leur hardiesse et leur habileté, toutefois, deviennent » inutiles à certaines époques de la marée dans les *Downs*, et des milliers de vaisseaux » se sont trouvés à l'instant de périr, sans qu'il fût possible de les secourir. Je ne me » suis pas encore assuré de la possibilité de battre des pieux sur la côte de Deal; mais » dans la supposition où la chose est possible, toutes les autres objections à l'établis- » sement d'un embarcadère suspendu disparaissent. Il n'y a aucune partie de la côte » où la mer soit aussi forte et brise avec autant de violence; mais je ne vois pas de » difficulté à proportionner la force des pieux et l'assemblage des palées à l'action puis- » sante à laquelle elles seraient exposées. Je proposerais alors que des bateaux d'une » certaine construction fussent suspendus à des rouleaux, de la même manière qu'ils » sont pendus à l'arrière des vaisseaux, prêts à être abaissés avec l'équipage et chaque » objet nécessaire, pour mettre à la mer au premier avertissement, jour ou nuit. Je

» proposerais au milieu de l'embarcadère deux emplacemens pour de grands bateaux, » capables de transporter les ancres et les câbles les plus forts.

» Mon plan n'est pas assez avancé pour me mettre à même d'entrer à présent dans » de plus grands détails; mais, après avoir examiné cet objet sous tous les rapports, » j'ai la plus grande confiance dans l'opinion qu'il n'est ni impraticable, ni même d'une » exécution difficile. Londres, 7 novembre 1821. *Signé* S. Brown. »

68. La description précédente fait connaître à-la-fois la nature de la construction, l'objet auquel elle est destinée, et les usages importans auxquels l'auteur pense que des constructions du même genre pourraient être consacrées. Nous ajouterons seulement quelques détails utiles aux constructeurs.

Les chevalets en fer fondu qui supportent les chaînes, sont représentés, figures 1 et 2, planche V. Ils sont formés principalement de huit montans inclinés, dont la section transversale (marquée *a*, figure 2), a la figure d'un T qui serait inscrit dans un rectangle de $0^{m},152$ de longueur sur $0^{m},089$ de largeur. L'épaisseur des branches du T est de $0^{m},038$, et il y a un petit congé aux angles rentrans formés par la jonction de ces branches. Les montans, qui se réunissent deux à deux aux extrémités supérieures, sont assemblés par des traverses horizontales, comme l'indique la figure 2, et, dans le haut, par une pièce de fer fondu composée de plusieurs traverses courbes. Les deux montans placés de chaque côté du passage sont fondus d'une seule pièce. Sur les faces latérales du chevalet, les montans sont assemblés, comme l'indique la figure 1.re, au moyen d'une autre pièce offrant un système de croix terminé par une courbe. Il y a des pièces semblables pour assembler deux à deux les montans situés dans des plans verticaux et les montans situés dans des plans inclinés, en sorte que ces pièces sont au nombre de quatre pour chaque chevalet. Les diagonales formant les croix ont $0^{m},028$ de largeur, sur $0^{m},016$ d'épaisseur. Les chevalets sont couronnés, de chaque côté du pont, par des pièces qui ont la forme d'une portion de demi-cylindre dont l'axe aurait été un peu courbé, et dans lesquelles reposent les chaînes. Nous pensons que les chaînes sont arrêtées fixement sur ces pièces; mais nous n'avons pu nous assurer positivement de cette dernière circonstance. Les pieds des montans du chevalet sont portés sur des semelles en bois, et fixés à la charpente des palées par des boulons. Les différentes pièces dont se composent les chevalets, sont d'ailleurs assemblées entre elles par des boulons à vis et écroux.

69. La figure 1.re, planche IV, indique que le plancher de l'embarcadère est supporté, non-seulement par les chaînes, mais encore par des tiges inclinées, dont une extrémité est fixée aux chevalets, et l'autre à divers points de la longueur du plancher. Ces tiges sont formées par des tringles en fer rond de $0^{m},025$ de diamètre, sur environ 4 mètres de longueur, portant des boucles aux extrémités, et assemblées entre elles

par de petits anneaux, comme le représentent les figures 11 et 12, planche VI. Il paraît que l'auteur, qui, dans la description transcrite ci-dessus, ne fait aucune mention de ces tiges, ne s'était point proposé d'abord de les employer, et qu'il les a jugées nécessaires après l'exécution, pour diminuer la flexibité du plancher. Cette conjecture est d'autant plus vraisemblable, que la manière dont l'extrémité supérieure est attachée aux chevalets (*voyez* les figures 1 et 2, planche V), au moyen d'oreilles en fer forgé assujetties avec des boulons, est assez imparfaite, et offre le caractère d'une disposition qui n'était point entrée dans le premier dessin. En examinant cette construction, nous avons aussi remarqué plusieurs pièces de fer placées en divers endroits du plancher, terminées par des boucles et d'autres ferrures fixées aux pieux des extrémités des palées. D'après la disposition et les situations respectives de ces pièces, elles étaient évidemment destinées à servir de point d'attache à d'autres tiges placées presque horizontalement, mais inclinées par rapport à la direction du plancher, et qui auraient eu pour objet de le contreventer, et de s'opposer aux balancemens horizontaux. Ces tiges n'existaient point au mois d'octobre 1821; et, quoique nous ayons vu l'embarcadère couvert d'un grand nombre de passagers, et observé des coups de vent assez forts, nous n'avons pas remarqué de balancemens horizontaux bien sensibles et qui pussent donner lieu à aucune inquiétude. Il paraît toutefois, d'après le rapport d'une personne qui a visité la construction dont il s'agit dans le courant de l'été de 1822, que les coups de vent plus violens de l'hiver précédent avaient engagé à mettre en place les contrevents dont on vient de parler, et même à maintenir le plancher par des liens attachés à des ancres placées au fond de la mer. Si ce rapport est exact, ce que nous ne pouvons affirmer, la construction paraîtrait s'être trouvée trop légère et trop mobile pour résister à l'action des vents, dans le climat orageux où elle est placée (1).

---

(1) En publiant, dans les premiers mois de 1822, un *prospectus* pour la construction d'un embarcadère à Brighton, le capitaine Brown a fait imprimer deux rapports des directeurs de l'embarcadère de la Trinité : le second de ces rapports, daté du 16 novembre 1821, est conçu en ces termes:

« Monsieur, conformément au desir que vous avez témoigné de savoir comment l'embarcadère suspendu de » la Trinité a supporté les derniers coups de vent violens de l'est, auxquels il est fort exposé, nous avons beaucoup » de plaisir à vous informer qu'il n'en a pas reçu le moindre dommage, et que, depuis que la plate-forme qui » en forme la tête a été allongée jusqu'à 70 pieds [21^{m}3], les bateaux à vapeur ont pu stationner à côté pendant » les coups de vent les plus forts que nous ayons éprouvés, la violence de la mer étant amortie par son passage » au travers des rangées de pieux.

» Il y a si peu de vibrations dans les chaînes et dans le plancher, que nous n'avons jamais vu que les pas- » sagers aient montré la moindre frayeur en le parcourant, et beaucoup de personnes le fréquentent, même » dans cette mauvaise saison, uniquement pour le plaisir de s'y promener. Nous sommes, &c. *Signé* A. SCOTT, » A. Stevenson, *directeurs de la compagnie de l'embarcadère de la Trinité;* G. CRICHTON, *trésorier.* »

Ce rapport constate que l'embarcadère n'avait aucunement souffert jusqu'au 16 novembre 1821: nous ne connaissons aucun renseignement authentique postérieur à cette époque.

70. Le plancher de l'embarcadère de la Trinité est beaucoup plus flexible que celui du pont du Tweed, parce que le poids de la construction, comparé à celui des fardeaux qui passent dessus, est bien moins considérable. Ce plancher cède sensiblement sous la charge d'une seule personne. L'effet de ces flexions est de déplacer les extrémités inférieures des tiges inclinées, de les tendre et de les détendre alternativement. La marche des passagers imprime à ces pièces un mouvement continuel et très-sensible, compliqué d'oscillations de diverses natures, et elles ne paraissent pas contribuer efficacement à la solidité de la construction. On peut remarquer à ce sujet qu'il n'est pas convenable d'employer simultanément à l'établissement des ponts suspendus le système des chaînes et celui des tiges inclinées. Ces deux systèmes offrent en effet, comme nous l'avons déjà remarqué, des propriétés différentes. Le premier est essentiellement flexible, et une construction supportée par une chaîne ne prend de la roideur et de la fermeté qu'autant que la chaîne a peu de courbure, et que le poids de la construction est suffisamment grand par rapport au poids des fardeaux mobiles. Au contraire, un système de tiges inclinées, formant un assemblage de triangles, n'est point susceptible de changer de figure par l'effet d'un changement dans la distribution de la charge; et les flexions qui peuvent se manifester dans un semblable système, sont uniquement dues à l'élasticité des matériaux. Il en résulte que la chaîne, permettant des flexions auxquelles les tiges inclinées tendent à s'opposer, n'est en général d'aucun secours à ces tiges, et laisse les fardeaux transportés sur le pont mettre en jeu l'élasticité du fer dont elles sont formées, à peu près comme ces fardeaux pourraient le faire si la chaîne n'existait pas. On peut donc dire en général que si les tiges offrent une solidité suffisante, la chaîne est inutile; et que si les tiges seules ne suffisent pas, la chaîne ne les secourt point, et ne commencerait à remplir son objet, qu'après que ces tiges auraient été rompues.

71. Depuis la construction de l'embarcadère de la Trinité, on s'est occupé d'en établir un semblable à Brighton, et le capitaine Brown a publié à cet effet un *prospectus* au commencement de 1822. Cet embarcadère doit avoir 12 pieds [$3^m,66$] de largeur, et être composé de trois travées de 230 pieds [70^m] d'ouverture chacune. La dépense est évaluée à 27 000 livres [$680\ 400^f$], y compris l'établissement d'une machine à vapeur et des appareils destinés à faciliter, par certains vents, la mise à la mer des bâtimens, et à leur faire éviter la tête de la jetée. Le travail a été commencé dans l'été de 1822. Le battage des pieux a été contrarié par la mer; mais le capitaine Brown ne doute point que cet obstacle ne puisse être surmonté.

72. A la suite de la description de l'embarcadère de la Trinité, dans le n.° XI de l'*Edinburgh philosophical Journal*, se trouve un petit dessin que nous remplaçons par les figures 1, 2 et 3 de la planche IV, dans lesquelles la construction est représentée conformément à l'état où elle se trouvait en octobre 1821. L'auteur a joint à ce dessin

diverses figures relatives à la composition des chaînes de ponts suspendus, copiées d'après la spécification jointe à sa patente. Afin de faire connaître en France, autant qu'il nous a été possible, tout ce qui a été publié sur ce sujet en Angleterre, nous avons reproduit les figures dont il s'agit dans la planche IV, figure 4, et nous traduisons ici l'explication dont elles sont accompagnées.

« G. Forte barre, formant une des parties de la principale ligne de suspension.

» H. Plaque d'assemblage *[coupling plate]* pour unir les barres par les extrémités.

» K. Boulon.

» I. Section du boulon K.

» L. Frette pour serrer le joint. — La même frette vue de côté.

» MM. Élévation latérale de deux barres assemblées.

» NN. Plan, vu en dessus, de deux paires de barres unies comme il vient d'être dit.

(Le mode d'assemblage représenté par ces figures est le même qui a été employé dans le pont mentionné ci-dessus, article 45.)

» R. Tige de suspension portant sur les joints de deux paires de barres, et supportant le » plancher du pont.

» SS. Autre manière de former les principales lignes de suspension par des barres droites, » renforcées aux extrémités, et disposées de manière à être retenues dans une paire » de joints à boîtes *[clam joints]*.

» T. Intérieur de la boîte formant le joint.

» UU. Paire de barres unies par le joint à boîte et frettées.

» V. Troisième méthode pour former les principales lignes de suspension par une réunion de » barres empilées ou placées latéralement, et tenues serrées par un joint formé par une » dentelure à crémaillère *[jagged scarf]*.

» X. Section montrant seize barres empilées et liées ensemble, la tige de suspension au travers » supportant la barre inférieure comme en R.

» Y. Élévation latérale d'une barre formant la moitié d'un long anneau, dont on peut se servir » pour enlever toute portion d'une chaîne qui se trouverait altérée.

» ZZZ. Plan, vu en dessus, représentant la manière de fixer l'anneau, et d'enlever la barre *ee*, » qui est supposée rompue (*). »

73. M. Stevenson a inséré dans l'article du n.° X de l'*Edinburgh philosophical Journal*, que nous avons eu plusieurs fois l'occasion de citer, le projet d'un pont suspendu, destiné dans l'origine pour le passage de la rivière d'Almond, sur la grande route du nord,

---

(*) Nous ajouterons à la description des ouvrages exécutés par le capitaine Brown quelques détails sur les câbles en fer destinés à l'usage de la marine. Cette invention utile commence à s'introduire en France, où M. C. Dupin, membre de l'académie des sciences, l'a fait connaître le premier. D'après les descriptions qu'il a données et les modèles qu'il s'est procurés en Angleterre, on vient d'établir à Guérigny, département de la

entre Edinburgh et Queensferry. L'ouverture de ce pont, représenté par la figure 9, planche I.re, est de 150 pieds [46^m]. La principale particularité qui distingue ce projet, est la manière de fixer les chaînes de suspension aux culées, et la suppression des supports élevés au-dessus du niveau de la route; supports qui s'opposent toujours à ce que les chaînes soient réparties également sur la largeur du plancher. Ces chaînes enveloppent la masse des culées, et on peut les inspecter en tout temps, au moyen du passage souterrain indiqué en *d*. Les extrémités sont formées en têtes de clous, et retenues dans des tubes creux coniques de fer fondu, scellés dans la maçonnerie des culées. La voie du pont repose sur les chaînes, au moyen d'une charpente en fer fondu, construite de manière à recevoir une couche de pierres cassées. L'auteur attribue à la disposition de ce pont divers avantages, mais en limite l'usage aux cas où l'ouverture ne surpasse point 200 pieds [61^m].

Nièvre, un grand atelier pour la fabrication de câbles en fer destinés à la marine royale. On en fabrique également à Nantes et au Havre pour la marine du commerce. La disposition de ces câbles est représentée planche IV, figure 5. La lettre A désigne ceux formés d'anneaux tordus, et la lettre B ceux formés d'anneaux plans : ces derniers sont employés plus fréquemment que les autres. La forme de chaque anneau est maintenue par une pièce transversale en fer fondu, que l'on place avant d'exécuter la soudure par laquelle l'anneau est fermé, et qui se trouve fortement serrée par l'effet de la contraction que le fer subit en se refroidissant. Le vide qui reste de chaque côté de cette pièce transversale est presque entièrement rempli par l'anneau adjacent, et il résulte de cette disposition que les anneaux ne peuvent se placer dans une position oblique, ou, comme on le dit ordinairement, que la chaîne ne peut se *nouer*. On évite par là les secousses auxquelles donnent lieu ces nœuds, et qui sont une des causes les plus fréquentes de la rupture des chaînes.

Les câbles sont formés de parties de 90 pieds de longueur, que l'on assemble les unes aux autres au moyen d'anneaux fermés par des boulons. Avant de les livrer aux acheteurs, on les éprouve dans des machines. La tension est produite, dans les machines du capitaine Brown, par des roues dentées engrenant les unes dans les autres, et sur lesquelles des hommes agissent au moyen d'une manivelle. Celle de ces machines qui existe à la manufacture de Millwall, près de Londres, est principalement composée de deux poutres en fer fondu de 27 mètres de longueur, placées horizontalement et parallèlement, à 1 mètre d'intervalle environ, et 1 mètre de hauteur au-dessus du sol. Ces poutres ont $0^m,13$ de largeur et $0^m,23$ de hauteur, et sont renforcées dans les joints des pièces qui les composent. A l'une des extrémités est un axe horizontal en fer fondu, ayant en dessous un bras vertical fort court, auquel la chaîne est attachée. Sur le même axe est fixé un long bras horizontal, formant avec le premier un levier coudé à angles droits. L'action de la chaîne tend à soulever l'extrémité de ce dernier bras; et ce mouvement est communiqué à un autre levier également horizontal, et dont l'extrémité est chargée d'un plateau de balance. Les poids placés sur ce plateau mesurent la tension de la chaîne, et se trouvent multipliés 224 fois, par suite des rapports établis entre les bras des deux leviers qui en transmettent l'action. Des contre-poids sont adaptés à ces leviers de manière à compenser l'effet des frottemens, en sorte que la charge placée sur le plateau indique immédiatement la tension, 10 livres avoir du poids correspondant à une tension d'une tonne. A l'autre extrémité des poutres est un axe en fer fondu de $0^m,3$ de diamètre, sur lequel sont fixées et peuvent s'enrouler deux portions de chaînes très-fortes, faites en chaînes de montre, et dont les anneaux sont fort courts. Les extrémités de ces chaînes se rapprochent, et on y fixe le dernier anneau de la chaîne mise à l'épreuve. L'axe qui les porte est tourné, pour opérer la tension, par des hommes agissant sur une manivelle, au moyen d'un mécanisme composé de trois pignons et de trois roues dentées en fer fondu, ayant environ 2 mètres de diamètre. La grosseur et la force des dents, et celle de la charpente des roues, augmentent depuis la roue qui reçoit l'action de la manivelle jusqu'à celle qui transmet immédiatement cette action à la chaîne. Deux hommes

74. Les derniers ponts suspendus faits en Angleterre ont été construits par M. Brunel, ingénieur civil, et membre de la société royale. Ces ponts doivent être transportés dans la colonie française de l'île de Bourbon. Ils ont été achevés dans le mois de janvier 1823, et montés dans un établissement situé dans le voisinage de Sheffield, où nous avons été les visiter dans le courant du mois de mai de la même année.

Le premier de ces ponts, dont les figures 1, 2 et 3 de la planche VII représentent l'élévation, le plan et la section transversale, est composé de deux travées, ayant chacune $40^{m},2$ d'ouverture entre les axes des chevalets en fer fondu sur lesquels les chaînes sont supportées, et $37^{m},2$ entre les culées et la pile. Le second, représenté par les figures 4, 5 et 6 de la même planche, est composé d'une seule arche, ayant également $40^{m},2$ d'ouverture entre les axes des chevalets qui soutiennent les chaînes. On remarque au-dessous du plancher, dans les figures 1 et 4, un arc dont la convexité est

---

agissant sur la manivelle produisent sur la chaîne une tension de 30 tonnes [$30\,480^{k}$]. La tension peut être portée jusqu'à 200 tonnes [$203\,200^{k}$].

Les tensions que l'on fait subir aux câbles, à l'aide de la machine, sont proportionnées à la grosseur du fer dont les anneaux sont formés, comme l'indique la table suivante :

DIAMÈTRE du fer des chaînons.	DIAMÈTRE des câbles de chanvre remplacés par la chaîne.	TENSION d'épreuve.	LONGUEUR des câbles en fer.
Pouces anglais.	Pouces anglais.	Tonnes.	Pieds anglais.
1 $\frac{1}{2}$.	5.	"	540.
0 $\frac{5}{8}$.	6.	"	"
0 $\frac{3}{4}$.	7.	9.	"
0 $\frac{7}{8}$.	8.	12.	"
1.	9 à 10.	16.	"
1 $\frac{1}{8}$.	11 à 12.	20.	"
1 $\frac{1}{4}$.	13 à 13 $\frac{1}{2}$.	25.	600.
1 $\frac{3}{8}$.	14 à 14 $\frac{1}{2}$.	30.	720.
1 $\frac{1}{2}$.	15 à 16.	36.	"
1 $\frac{5}{8}$.	17 à 17 $\frac{1}{2}$.	42.	"
1 $\frac{3}{4}$.	18.	48.	"
1 $\frac{7}{8}$.	19 à 20.	56.	840.
2.	21 à 22.	64.	"
2 $\frac{1}{8}$.	23 à 24.	72.	"

Les tensions d'épreuve sont égales à la force qui a été trouvée nécessaire, d'après des expériences faites sous

tournée vers le haut, et qui peut sembler, au premier coup d'œil, concourir au soutien du poids de ce plancher. Mais cet arc est formé d'une chaîne flexible, comme celles situées au-dessus du plancher du pont; et les tiges qui lient cette chaîne au plancher, loin d'être contractées, sont tendues. Ces chaînes inférieures sont au nombre de quatre, et elles sont placées dans des plans inclinés, comme l'indiquent les projections horizontales, qui se voient dans les figures 2 et 5, ainsi que les directions inclinées des tiges, figures 3 et 6. Elles sont uniquement destinées à maintenir le plancher contre l'action du vent, lors des ouragans auxquels ces ponts se trouveront exposés, et M. Brunel les nomme, par cette raison, *chaînes de revers.* Les constructions dont il s'agit n'offrent pas des dimensions aussi considérables que celles exécutées par le capitaine Brown; mais les détails n'en sont pas moins dignes d'attention. Ces détails sont en grande partie communs aux deux ponts. Nous décrirons

---

la direction des commissaires de la marine, pour rompre les câbles de chanvre que les chaînes sont destinées à remplacer. Quand on fait rompre les câbles en fer, ils soutiennent généralement le double de la tension d'épreuve, et dans tous les cas un effort beaucoup plus grand que cette tension.

L'usage de ces câbles a donné lieu à l'invention de divers appareils ingénieux, destinés à en faciliter la manœuvre. On distingue parmi ces appareils une sorte de boîte en fer fondu, formée par un couvercle à charnière armé d'un levier; le câble passe dans la boîte, et, en pressant le couvercle au moyen du levier, un seul homme peut produire un frottement suffisant pour empêcher le glissement du câble, lors même qu'il est tiré par une force très-considérable. On trouve bien plus de facilité à manœuvrer à bord des vaisseaux les câbles en fer que les anciens câbles en chanvre; on n'est pas obligé de les lover comme ces derniers, et ils se rangent d'eux-mêmes dans des espèces de puits, où on les laisse tomber.

Les établissemens de M. Brunton, dont nous avons rapporté les réponses lors de l'enquête relative au pont sur le détroit de Menai (articles 35 et 42), rivalisent avec ceux du capitaine Brown. On doit à M. Brunton l'usage de la traverse en fer fondu destinée à maintenir la figure des anneaux. On employait d'abord à cet effet une traverse en fer forgé, fixée par des tenons aux deux extrémités, qui n'avait pas aussi bien réussi. Les anneaux fabriqués par ces deux ingénieurs offrent une légère différence; la forme de ceux du capitaine Brown se rapproche d'un ovale et celle des autres d'un lozange.

La machine employée par M. Brunton pour l'épreuve des câbles offre une disposition générale analogue à celle de la machine décrite ci-dessus; mais l'appareil qui opère la tension de la chaîne, et donne la mesure de la tension, est disposé sur le principe de la presse hydraulique. Cet appareil offre un gros corps de pompe, placé horizontalement, et dans lequel se meut un piston. Ce corps de pompe est fermé à l'une des extrémités, et cette extrémité est traversée par la tige du piston, que l'on fixe à la chaîne soumise à l'épreuve. Trois autres corps de pompe, manœuvrés par des hommes, forcent l'eau dans l'intérieur du premier, obligent le piston à se mouvoir jusqu'à ce que la chaîne soit tendue, et produisent contre la surface de ce piston une pression qui se transmet à la chaîne. La tension est mesurée au moyen d'une soupape de sûreté adaptée au corps de pompe : on juge, d'après le poids dont on la charge, et le rapport qui existe entre la surface de cette soupape et celle du piston, de la pression exercée contre ce dernier.

D'après la description de ces deux machines, on peut comprendre pourquoi M. Barlow regarde celle de M. Brunton comme exagérant l'action exercée, et celle du capitaine Brown comme la diminuant (article 39). En effet, dans la première, l'effort indiqué par la charge de la soupape de sûreté n'est pas transmis en entier à la chaîne, puisqu'une partie de cet effort est employée à surmonter les frottemens du piston et de la tige. Dans la seconde, au contraire, l'effort indiqué par les poids placés sur le plateau de balance répond en même temps à la tension de la chaîne et à la force nécessaire pour surmonter les frottemens des leviers.

d'abord le premier, et nous indiquerons ensuite les différences qui existent entre ces deux ouvrages.

Les figures 1 et 2 de la planche VIII représentent la section transversale et le plan d'une portion du pont. Dans la partie à gauche de la figure 2, on a supprimé les madriers et les poutres longitudinales en bois, pour laisser voir les poutres transversales et les chaînes de revers. La figure 3 de la même planche représente l'élévation latérale de la portion du pont aboutissant à la culée, et l'on voit, dans la figure 4 de la planche IX, l'élévation latérale de la portion aboutissant à la pile. Le pont est partagé en deux passages, les chaînes de support étant distribuées dans trois plans verticaux, dont la distance est de $2^{m},95$. Cette distance a été réglée d'après les dimensions des petites voitures en usage dans la colonie, et la force de la construction est également relative au poids de ces voitures, qui ne dépasse pas 1 000 kilogrammes.

75. Le plancher est formé par des poutres transversales en fer fondu, composées de deux pièces, dont la disposition générale se voit sur les figures citées, et dont on trouve les détails dans les figures 1 à 10 de la planche X. La figure 1 offre l'élévation de l'extrémité d'une poutre à l'une des têtes du pont; et la figure 2, le plan de cette extrémité vue par dessous. La figure 3 donne l'élévation latérale de la même extrémité; et la figure 4, le plan vu par dessus. La figure 6 montre la section transversale de la poutre au milieu de la longueur. Les figures 7 et 8 offrent les élévations latérales et le plan des extrémités des deux pièces qui composent chaque poutre, qui sont assujetties entre elles, et se trouvent également soutenues par les tiges de suspension placées dans le plan milieu du pont. Enfin les figures 9 et 10 sont une section transversale faite dans l'une des pièces au-devant de cette jonction, et un plan des deux extrémités vues en dessous. Les parties hachées des figures 6 et 9 montrent que la section transversale des pièces, entre les extrémités, a la forme d'un T dont la tige aurait été renforcée à l'extrémité inférieure. La largeur de cette section est de $0^{m},102$; la hauteur, de $0^{m},14$ aux extrémités, et de $0^{m},229$ au milieu : l'épaisseur de la face supérieure et de la côte verticale est de $0^{m},019$; la largeur du renfort courbe placé dans le bas, de $0^{m},051$. Les extrémités des pièces aux têtes du pont, et la réunion des extrémités opposées des mêmes pièces dans le plan milieu de ce pont, offrent en dessus une plaque carrée de $0^{m},203$ de largeur, avec deux rebords saillans, et en dessous des cylindres verticaux ayant $0^{m},102$ de diamètre, dans l'axe desquels passent les tiges de suspension, et qui reposent sur les écroux placés aux extrémités inférieures de ces tiges. Les pièces sont assujetties l'une à l'autre, dans le plan milieu du pont, par deux boulons, et de plus par une sorte de tasse ou coupe en fer fondu, dans laquelle pénètrent les extrémités inférieures des demi-cylindres appartenant aux deux pièces, et qui, étant traversée comme eux par la tige de suspension, repose sur l'écrou que reçoit cette tige.

Au moyen de cette coupe, dont le profil se voit dans les figures 7 et 9, mais qui a été supprimée dans la figure 10, l'union des deux parties de la poutre est parfaitement assurée.

76. Sur les plaques carrées que présentent les extrémités des poutres transversales en fonte, reposent trois cours de poutres longitudinales en bois, ayant $0^m,203$ d'écarrissage, et offrant en dessus deux faces planes légèrement inclinées. Sur ces poutres, dans les parties correspondantes aux extrémités des poutres transversales, sont placées des plaques en fer fondu de $0^m,019$ d'épaisseur, offrant une sorte de chapeau avec des rebords, qui prend la forme de la face supérieure de la poutre. Ce chapeau et la poutre elle-même sont traversés par la tige de suspension, aussi bien que par deux boulons verticaux, au moyen desquels les pièces en bois sont fixées aux poutres transversales.

77. Dans les intervalles des trois poutres longitudinales, le plancher est formé, 1.° par deux cours de forts madriers de $0^m,102$ d'épaisseur, et $0^m,305$ de largeur, sur lesquels passeront les roues des voitures; 2.° par des madriers de $0^m,051$ d'épaisseur placés entre les premiers, sur lesquels marcheront les chevaux; 3.° enfin par des madriers de $0^m,029$ d'épaisseur, placés à côté des poutres longitudinales, sur lesquels marcheront les personnes à pied. Le passage des voitures est limité par des bouteroues en fer fondu de $0^m,019$ d'épaisseur. Sous la trace des roues sont placées des bandes longitudinales de fer forgé ayant $0^m,01$ d'épaisseur; et sous celle des chevaux, des bandes transversales dont l'épaisseur est de $0^m,006$. Les madriers les plus épais sont légèrement entaillés à la rencontre des poutres transversales, et tous sont liés à ces poutres par de petits boulons qui en saisissent la face supérieure. Toute la charpente du plancher est en bois de *teak*, dont la dureté est très-grande, et qui résiste beaucoup mieux que les bois d'Europe au climat ardent des colonies.

78. Les détails de la construction du parapet sont indiqués dans les figures 1, 3, 4 et 5 de la planche X. Il est formé par des barreaux placés à côté de chaque tige de suspension, ayant $0^m,022$ de diamètre, dont l'extrémité inférieure pénètre dans un appendice cylindrique fondu avec le chapeau placé sur la poutre, et dont l'extrémité supérieure est assujettie à la tige de suspension par un petit étrier, représenté figure 5. Aux deux extrémités de ces barreaux passent des lisses longitudinales ayant $0^m,051$ de largeur, qui reçoivent les barreaux intermédiaires, dont le diamètre est de $0^m,016$.

79. Le plancher du pont est dirigé, dans chaque travée, suivant une ligne inclinée, la différence de niveau des surfaces supérieures des culées et de la pile étant d'environ $1^m,3$. Les chaînes auxquelles le plancher est suspendu, forment une courbe dont les extrémités sur la pile et sur la culée sont élevées de $7^m,52$ et $1^m,6$ au-dessus de la

surface supérieure de la maçonnerie, et dont le point le plus bas, ou le sommet, est placé à $0^m,3$ au-dessous de la dernière de ces extrémités. Ces chaînes sont distribuées, comme on l'a dit plus haut, dans trois plans verticaux, et il se trouve dans chaque plan deux cours d'anneaux placés les uns à côté des autres. La disposition générale est indiquée dans les figures 1, 2 et 3, planche VIII, et 4, planche IX. L'assemblage des anneaux est représenté d'une manière plus distincte dans les figures 11, 12 et 13 de la planche X. La première de ces figures est l'élévation latérale de l'assemblage; la seconde en est le plan. Le côté gauche de la troisième est une section transversale faite dans le milieu de l'assemblage; et le côté droit, une section transversale au-devant de l'assemblage.

Les anneaux oblongs qui composent les chaînes, sont posés de champ; ils ont $1^m,416$ de longueur en dedans, et sont faits en fer rond, dont le diamètre est de $0^m,035$. Ainsi le pont est supporté par douze barres de fer de cette grosseur. Ces anneaux sont réunis au moyen de petites boucles ayant $0^m,222$ de longueur en dedans, faites en fer rectangulaire, dont la largeur est de $0^m,035$, et l'épaisseur de $0^m,025$. Le diamètre des boulons en fer forgé qui forment l'assemblage, est de $0^m,051$. La figure 12, planche X, montre que l'un de ces boulons est commun aux deux cours d'anneaux placés l'un à côté de l'autre, et sert à soutenir la tige de suspension au moyen d'une boucle qui forme l'extrémité supérieure de cette tige, et dans laquelle passe le boulon. Les figures 11, 12 et 13 se rapportent au plus grand nombre des assemblages des chaînes. Dans les assemblages contigus aux chevalets, et de quatre en quatre assemblages à compter de ces derniers, les petits boulons sont formés de deux parties, entre lesquelles on peut insérer des cales, ce qui permet de régler à volonté la longueur des chaînes. Cette dernière disposition est représentée par les figures 14 et 15, dont on aperçoit facilement la correspondance avec les parties analogues des figures 11 et 12. On peut remarquer que les boulons d'assemblage n'offrent pas, comme dans la plupart des constructions, une tête d'un côté, et de l'autre un écrou ou une clavette; ils ont de chaque côté une demi-tête ovale, par laquelle ils sont suffisamment maintenus quand la chaîne est tendue. En tournant convenablement ces boulons, de manière à présenter leurs demi-têtes dans le vide des boucles qu'ils assujettissent, on peut placer ou replacer sans difficulté ces boucles les unes après les autres.

80. D'après les dimensions des anneaux et des boucles d'assemblage, les points de suspension des tiges sont espacés à $1^m,524$ sur la longueur de la chaîne, et les espacemens des poutres transversales du plancher se trouvent réglés en conséquence. Les tiges de suspension sont en fer rond de $0^m,032$ de diamètre. Les quatre premières tiges, à compter du chevalet placé sur la pile, sont faites en deux parties réunies par des boucles (*voyez* la figure 4, planche IX), au travers desquelles passe une tige horizontale. L'une des

extrémités de cette tige est fixée au chevalet par une boîte à vis qui permet d'en régler la longueur ; l'autre extrémité est assujettie à l'un des joints de la chaîne, de la même manière que le sont les tiges de suspension.

81. La disposition générale des chaînes de revers se voit sur les figures 1, 2 et 3, planche VIII, et 4, planche IX. Chacune des quatre chaînes est composée d'un seul cours de tringles en fer rond de $0^m,032$ de diamètre, ayant des boucles aux extrémités. L'assemblage de ces tringles, représenté dans les figures 16, 17 et 18, planche X, s'opère au moyen de deux plaques en fer arrondies par les deux bouts, ayant $0^m,016$ d'épaisseur et $0^m,082$ de largeur. Ces plaques servent également à fixer les extrémités inférieures des tiges qui lient le plancher aux chaînes de revers, et qui sont terminées par une boucle : elles sont percées à cet effet de trois trous, dans lesquels passent des boulons d'assemblage dont le diamètre est de $0^m,032$. Les plaques dont il s'agit n'ont point été travaillées à la forge : les arrondissemens des extrémités et les trous des boulons ont été formés par des emporte-pièces mus par des machines très-fortes, disposées à peu près comme celles qui font mouvoir les cisailles à couper la tôle, et dont l'action est assurée et rendue plus puissante par des volans.

82. Les tiges appartenant aux chaînes de revers ont $0^m,029$ de diamètre ; elles sont placées dans des plans verticaux, à côté des tiges de suspension, et les extrémités supérieures, après avoir traversé suivant une direction oblique les poutres longitudinales du plancher (*voyez* les figures 1 à 10 de la planche X), sont taraudées et reçoivent un écrou.

83. Après avoir décrit le plancher, les chaînes de suspension et les chaînes de revers, nous passons aux appuis en fer fondu sur lesquels les chaînes sont supportées. Le chevalet établi sur la pile est représenté sur la planche IX, et ceux des culées se voient dans les figures 3, 4 et 5 de la planche VIII. Les chaînes ne sont fixées à ces chevalets que par l'intermédiaire d'une sorte de suspension en fer forgé, dont la section transversale est représentée à part dans la figure 6, planche IX, et qui, pouvant tourner sur l'axe supérieur, qui est seul fixe, permet aux points d'attache des chaînes d'éprouver, dans le sens de la longueur du pont, les légers déplacemens horizontaux auxquels ces points peuvent être sollicités par l'effet de l'inégalité des charges passagères sur les deux travées contiguës. Le diamètre des axes est de $0^m,064$.

84. La figure 1 de la planche IX est l'élévation du chevalet projeté sur un plan vertical perpendiculaire à la longueur du pont. La figure 2 en est le plan : dans le côté gauche de cette figure, le chevalet est coupé au-dessus des traverses inférieures ; dans le côté droit, il est coupé au-dessus des traverses intermédiaires. La figure 3 est le plan de la poutre supérieure : dans le côté gauche, cette poutre est coupée un peu au-dessus de la face horizontale ; dans le côté droit, elle est vue par dessus, avec les

suspensions et les chaînes. La figure 4 est l'élévation latérale du chevalet : on y voit les chaînes et les têtes des traverses intermédiaires (appliquées simplement contre ces traverses et maintenues par un boulon), qui ont été supprimées dans la figure 1. Le côté gauche de la figure 5 est une section horizontale faite dans la hauteur des traverses inférieures; le côté droit est une section semblable faite au milieu de la hauteur des traverses intermédiaires. La figure 7 est une section transversale faite dans la poutre supérieure.

La construction représentée par ces figures est composée de différentes parties que nous allons décrire successivement.

1.° Un patin posé sur la surface supérieure de la maçonnerie de la pile, et formé de quatre pièces. Il offre des traverses correspondantes aux traverses inférieures de la charpente, ayant $0^{m},457$ de largeur, réunies par trois entre-toises de $0^{m},203$ de largeur. Au-delà des traverses extrêmes, se trouvent des plaques cylindriques ayant $0^{m},305$ de diamètre, assujetties entre elles et à ces traverses par d'autres pièces, dont la largeur est de $0^{m},152$. L'épaisseur générale des pièces du patin est de $0^{m},051$; les entre-toises ont une épaisseur moitié moindre dans une petite partie de la largeur (comme l'indiquent les lignes ponctuées dans le côté gauche de la figure 2). L'épaisseur des plaques cylindriques est de $0^{m},089$. Les pièces du patin sont assujetties entre elles au moyen d'appendices courbes saillans en dessus, et traversés par des boulons.

2.° Trois traverses inférieures, offrant une sorte de tuyau carré ayant intérieurement $0^{m},203$ de largeur, dont la face inférieure est supprimée, et aux extrémités duquel se trouvent des appendices extérieurs qui portent à $0^{m},457$ la largeur de la face supérieure. La longueur du tuyau est de $2^{m},06$; l'épaisseur des parois et des appendices est de $0^{m},038$. Ce tuyau reçoit les extrémités des poutres longitudinales du plancher.

3.° Trois chevalets formés chacun de deux jambes de force inclinées, assujetties par six traverses horizontales. La hauteur verticale de ces chevalets est de $3^{m},86$. La section transversale des jambes de force est indiquée par des hachures dans la figure 2. La largeur de la face est de $0^{m}254$; celle de la côte, de 0,222 dans le bas, et de $0^{m},16$ dans le haut. L'épaisseur est de $0^{m},032$. Elles sont terminées en bas par une base horizontale carrée, ayant $0^{m},457$ de largeur, sur $0^{m},051$ d'épaisseur; et en haut, par une base également horizontale, ayant $0^{m},356$ de largeur, sur $0^{m},038$ d'épaisseur. Ces bases sont réunies par des traverses ayant dans le bas $0^{m},254$, et dans le haut, $0^{m},102$ de largeur, sur $0^{m},038$ d'épaisseur. Les quatre traverses intermédiaires ont de $0^{m},127$ à $0^{m},102$ de largeur, et $0^{m},032$ d'épaisseur, comme la côte des jambes de force.

4.° Trois traverses intermédiaires, posées sur chacun des chevalets, dont les extrémités, sur $0^{m},305$ de longueur, offrent la forme d'un tuyau carré, ayant extérieurement $0^{m},305$ de grosseur; et la partie intermédiaire, sur $0^{m},559$ de longueur, celle d'un

tuyau cylindrique, ayant extérieurement $0^m,254$ de diamètre. L'épaisseur des parois est de $0^m,038$.

5.° Deux entre-toises qui assujettissent ces traverses dans le sens de la largeur du pont, ayant la forme d'une sorte de caisse dont le fond inférieur est supprimé, et dont le fond supérieur est formé de deux faces inclinées. Ces caisses, dont la figure 8 offre une section transversale faite au milieu de la longueur, sont renforcées par trois côtes transversales saillant sur le fond, et par quatre appendices triangulaires contigus aux faces extrêmes. La largeur des caisses est de $1^m,117$; les faces supérieures et latérales, et les côtes transversales, ont $0^m,019$ d'épaisseur. Les faces extrêmes et les appendices triangulaires en ont $0^m,032$.

6.° Trois chevalets supérieurs offrant la même disposition que les précédens. La hauteur verticale est de $2^m,82$. La largeur de la face des jambes de force est de $0^m,229$; celle de la côte, de $0^m,121$ dans le bas, et $0^m,102$ dans le haut : l'épaisseur est de $0^m,029$. Les bases horizontales qui les terminent dans le bas, ont $0^m,305$ de longueur, $0^m,267$ de largeur, et $0^m,038$ d'épaisseur : il n'y a point de traverse pour les réunir. Les bases qui terminent les jambes de force dans le haut, ont $0^m,457$ de longueur, $0^m,127$ de largeur, et $0^m,051$ d'épaisseur : elles sont réunies par une traverse de même largeur et de même épaisseur. Les trois traverses intermédiaires ont de $0^m,102$ à $0^m,076$ de largeur, sur $0^m,029$ d'épaisseur.

7.° Une poutre supérieure en deux pièces, dont le joint repose sur le chevalet du milieu. Cette poutre est principalement formée d'une face inférieure ayant $0^m,457$ de largeur sur $0^m,029$ d'épaisseur, et d'une côte verticale ayant $0^m,178$ de hauteur et une épaisseur égale. Sur cette face s'élèvent des appendices verticaux ayant $0^m,039$ d'épaisseur, assujettis aux extrémités supérieures par des boulons, et qui supportent les suspensions des chaînes. La poutre est couverte par un petit toit en fer fondu, représenté dans la figure 2, et supprimé dans les autres figures.

Toutes les pièces qui viennent d'être décrites, sont assujetties les unes aux autres par des boulons d'assemblage ayant $0^m,032$ de diamètre, qui traversent les faces contiguës des pièces, et qui sont indiqués distinctement sur les figures.

Outre ces boulons, il entre dans la construction du chevalet de grands boulons en fer forgé, ayant $0^m,044$ de diamètre, et destinés à maintenir la charpente contre les actions latérales. L'étage inférieur de cette charpente offre de chaque côté deux de ces boulons, dont les extrémités inférieures sont retenues sous les plaques cylindriques formant les extrémités du patin, et dont les extrémités supérieures passent au travers des parties cylindriques des traverses intermédiaires. L'étage supérieur offre six boulons, dont quatre sont dirigés des traverses extrêmes au milieu de la poutre supérieure, et deux de la traverse du milieu aux extrémités opposées de cette poutre.

85. Le patin et les traverses inférieures sont fixés au massif de la pile par des boulons de $3^m,5$ de longueur et $0^m,039$ de diamètre (le tracé en a été interrompu dans les figures 1 et 2, pour laisser la place des figures 2 et 5). Les extrémités inférieures de ces boulons sont retenues par des clavettes sous des plaques en fonte insérées dans la maçonnerie, qui sont représentées à leurs positions respectives dans la figure 2, et dont l'épaisseur est de $0^m,025$ et $0^m,051$.

On peut remarquer qu'il n'y a pas, en général, de rondelles sous les écrous des boulons; mais les faces des pièces sont légèrement renforcées dans l'emplacement de ces écrous. Les trous pour le passage des boulons ont été pratiqués dans l'opération de la fonte.

86. La disposition générale des chevalets placés sur les culées est indiquée dans les figures 1 et 2, planche VII. L'élévation latérale du chevalet se voit dans la figure 3, planche VIII. La figure 4 de la même planche est l'élévation d'une extrémité, projetée sur un plan perpendiculaire à la longueur du pont. La figure 5 est le plan de la même extrémité. On voit dans la figure 3 que les chaînes de support et de retenue sont fixées par l'intermédiaire d'une suspension mobile, semblable à celle du grand chevalet placé sur la pile. Ces chaînes sont supprimées dans la figure 4, et l'on a seulement tracé dans la figure 5 les chaînes de retenue.

Les parties dont ces chevalets se composent, sont:

1.° Un patin formé de quatre pièces, offrant des traverses dont la largeur est de $0^m,457$, réunies par des entre-toises dont la largeur est de $0^m,203$. A chaque extrémité se trouvent des plaques cylindriques ayant $0^m,305$ de diamètre, réunies aux traverses par deux pièces dont la largeur est $0^m,152$. L'épaisseur des pièces est la même qu'au patin placé sur la pile, et la jonction en est opérée de la même manière.

2.° Trois chevalets, formés chacun d'une traverse inférieure, d'un poteau et de deux contre-fiches, fondus ensemble. La traverse inférieure offre un tuyau carré, ayant $2^m,06$ de longueur, dont la largeur est intérieurement de $0^m,203$, et dont la face inférieure est supprimée. Les faces latérales ont des rebords qui s'appliquent sur les traverses du patin. Le poteau offre un tuyau carré, dont la dimension extérieure est $0^m,356$, la hauteur, à compter de la face supérieure du patin, de $2^m,06$, et qui est terminé en dessus par un arrondissement cylindrique. Deux des faces de ce poteau sont interrompues dans une partie de la hauteur, pour laisser passer les chaînes. Les deux autres faces sont renforcées, jusqu'au point de suspension des chaînes, par une côte ayant $0^m,051$ de largeur et de saillie. Les contre-fiches offrent une face inclinée et une côte transversale, dont les largeurs sont respectivement de $0^m,267$ et $0^m,114$. L'épaisseur des faces de toutes ces pièces est de $0^m,038$.

3.° Deux contre-fiches servant à consolider les poteaux des fermes extrêmes du chevalet (le poteau placé dans le plan milieu du pont est isolé). Elles s'appliquent, par

les extrémités inférieures, sur les plaques cylindriques formant les extrémités du patin; et par les extrémités supérieures, contre la face latérale du poteau. Ces contre-fiches sont formées par une face inclinée et une côte, ayant $0^{m},203$ et $0^{m},076$ de largeur, sur $0^{m},038$ d'épaisseur.

Les pièces sont assujetties entre elles par des boulons, et maintenues par d'autres boulons pénétrant dans la maçonnerie.

87. Les chaînes de retenue commencent aux chevalets qui viennent d'être décrits. Chacune de ces chaînes est formée de deux cours de barres rectangulaires ayant $0^{m},076$ de largeur, $0^{m},032$ d'épaisseur, et $3^{m},05$ de longueur. Ces barres sont terminées aux extrémités par une boucle, et sont réunies par des boulons d'assemblage ayant $0^{m},051$ de diamètre. Les figures 6 et 7 de la planche VIII indiquent suffisamment la disposition ordinaire des assemblages. On voit dans les figures 3 et 5 ceux de ces assemblages qui sont contigus aux chevalets, et qui, étant formés par des boucles et contenant un boulon partagé en deux parties, permettent de régler convenablement la longueur des chaînes de retenue au moyen des cales insérées dans ce boulon.

88. Aux extrémités opposées des chaînes de retenue, qui pénètrent dans la terre, sont placées des plaques rondes en fer fondu, représentées par les figures 8 et 9 de la planche VIII. Ces plaques ont $0^{m},914$ de diamètre et $0^{m},051$ d'épaisseur; elles sont renforcées en dessous par des côtes ayant $0^{m},18$ de saillie, et offrent des ouvertures rectangulaires dans lesquelles passent les extrémités des chaînes de retenue. On doit placer ces plaques dans la terre à une assez grande profondeur, et les charger de matériaux assez pesans pour en assurer l'immobilité.

Les chaînes de revers se trouvent assujetties dans la pile (comme l'indiquent la figure 1, planche VII, et la figure 4, planche IX) par le moyen des anneaux oblongs qui les terminent, et qui embrassent un axe cylindrique scellé dans la maçonnerie. Les extrémités opposées de ces chaînes sont fixées dans la maçonnerie des culées. Comme, en montant les ponts dans l'établissement où ils ont été construits, on n'avait pu adopter que des dispositions provisoires pour l'assujettissement des extrémités des chaînes, cette partie de la construction ne peut être décrite ici avec la même précision que les autres.

89. Dans le pont d'une seule arche représenté dans les figures 4, 5 et 6 de la planche VII, les points d'attache des chaînes sont situés à $4^{m},7$ au-dessus de la surface des culées, et la flèche de la courbure des chaînes de support est d'environ 3 mètres. La construction du plancher et du parapet, des chaînes de support, des chaînes de revers et des chaînes de retenue, ne diffère point de la construction des mêmes parties dans le pont qui vient d'être décrit.

90. Quant à la charpente en fer fondu qui forme les soutiens des chaînes, et dont

les figures citées indiquent la disposition générale, elle repose sur un patin pareil à celui placé sur la pile dans le premier pont. La poutre supérieure, portant les suspensions des chaînes, est également pareille à la poutre supérieure de la charpente représentée planche IX. Les trois chevalets ont la même hauteur que les chevalets inférieurs de cette dernière charpente, et sont disposés de la même manière ; ils en diffèrent seulement en ce qu'ils sont fondus d'une seule pièce avec les traverses inférieures dans lesquelles sont reçues les extrémités des poutres longitudinales du plancher, et en ce que les plaques horizontales formant les extrémités supérieures ont des dimensions correspondantes à celles de la poutre qui porte sur ces plaques. La largeur de la face des jambes de force est de $0^{m},23$; celle de la côte, de $0^{m},2$ à $0^{m},15$: l'épaisseur est de $0^{m},032$.

Les chevalets ne sont point maintenus par des boulons en fer forgé, mais par des contre-fiches en fer fondu, formées par un tuyau carré dont la face inférieure est supprimée. La grosseur de ce tuyau est intérieurement de $0^{m},102$, et l'épaisseur des trois faces, de $0^{m},025$. Les extrémités inférieures de ces contre-fiches s'appliquent sur les plaques cylindriques appartenant au patin, et les extrémités supérieures, sous les plaques horizontales qui terminent les chevalets.

La description précédente, et les dessins dont elle est accompagnée, paraissent suffire pour faire connaître complétement les ponts construits par M. Brunel. Ces ouvrages, qui se distinguent par la disposition ingénieuse des détails et par l'élégance de l'exécution, ont vivement intéressé le public et les artistes, et augmenteront encore la réputation de cet habile ingénieur.

91. Les rédacteurs de la *Bibliothèque universelle*, en donnant un extrait des articles publiés dans les journaux anglais sur les ponts suspendus, ont décrit le premier pont de ce genre qui ait été construit en France. Cet ouvrage est dû à MM. Seguin, fabricans à Annonay, département de l'Ardèche. L'ouverture est de 19 mètres, et la largeur d'environ $0^{m},65$. Le plancher est formé de longs madriers fixés sur de petites traverses en bois. Ces traverses sont portées par un câble en fil de fer, offrant un faisceau de 8 fils de $\frac{1}{21}$ de pouce [$0^{m},0012$] de grosseur. La première extrémité du câble est attachée à un clou scellé dans le rocher; ce câble traverse quatre fois la rivière, en passant sur des poulies fixes de 3 pouces [$0^{m},081$] de diamètre, et la seconde extrémité se trouve fixée du même côté que la première. Des fils tendus horizontalement et verticalement forment les parapets. Le milieu du plancher est amarré à de grosses pierres placées au fond de l'eau, pour prévenir les balancemens. MM. Seguin évaluent moyennement, d'après leurs expériences, la force d'un fil de fer de $0^{m},002$ de grosseur à 190 kilogrammes; ce qui revient à 60 kilogrammes par millimètre carré.

Les mêmes fabricans ont présenté à l'administration le projet d'un pont suspendu qui doit être établi sur le Rhône, entre les villes de Tain et de Tournon.

92. La construction dont il nous reste à parler pour terminer cet exposé historique, est une des plus remarquables parmi celles où les chaînes de fer ont été employées. Cette construction consiste dans un tuyau formant une conduite d'eau, supporté en l'air par une chaîne de fer forgé. Ce tuyau a été établi en octobre 1822, dans la terre de Crouzol, située dans le département du Puy-de-Dôme, et appartenant à M. le comte de Chabrol, conseiller d'état et préfet du département de la Seine. Le tuyau et la chaîne qui le supporte traversent un vallon. La longueur entre les points d'attache est de 195 mètres. La différence de niveau de ces points est de 15 mètres. Le sommet, ou le point le plus bas de la chaîne, est situé à $0^m,7$ environ au-dessous du niveau du point d'attache inférieur.

La chaîne est formée par un seul cours de tringles en fer carré de $0^m,015$ de grosseur, et $6^m,5$ de longueur. Elles sont réunies par des assemblages *à moufles;* c'est-à-dire qu'elles offrent à une extrémité une fourchette dans laquelle s'insère l'extrémité aplatie de la tringle suivante, et au travers de laquelle passe un boulon à clavette, ayant $0^m,018$ de diamètre. Ces boulons se trouvent placés horizontalement. Toutes les tringles ont été éprouvées en les soumettant à une tension de 4 000 à 4 500 kilogrammes [18 à 20 kilogrammes par millimètre carré de la section transversale]. Près de la moitié des pièces soumises à cette épreuve ont rompu par l'effet de quelque défaut dans le fer; mais la rupture n'a eu lieu que très-rarement dans les soudures. Ces pièces se sont allongées d'environ $0^m,08$ avant de rompre ; celles qui ont résisté ne s'allongeaient que très-peu.

Le tuyau est en zinc; le diamètre intérieur est de $0^m,031$, et l'épaisseur de la paroi, de $0^m,0017$; la longueur des parties est de 2 mètres. L'assemblage de ces parties, conformément au mode généralement adopté, consiste en ce que l'extrémité de chaque pièce pénètre dans celle de la pièce suivante, dont le diamètre est agrandi pour la recevoir. Cet assemblage est rendu étanche par du chanvre, retenu entre deux collets fixés à la première de ces extrémités, et qu'on a trempé dans du suif chaud. Chaque pièce du tuyau est fixée à la chaîne par deux liens en fil de fer, et l'on a placé entre ce fil et le zinc un collier de cuir, pour prévenir l'oxidation qui pourrait résulter de l'action électrique produite par le contact des deux métaux. L'effort nécessaire pour tendre la chaîne, lors de la mise en place, a été évalué à environ 1 200 kilogrammes.

La chaîne et le tuyau sont demeurés en place depuis le mois d'octobre 1822, et ont soutenu sans accident l'action des vents de l'hiver dernier. Les conduites en pierre qui devaient amener l'eau à l'extrémité supérieure du tuyau n'étant pas terminées, on n'a pu, à cette époque, y faire couler l'eau d'une manière permanente ; on s'est seulement assuré, par une expérience, que le tuyau devenait parfaitement étanche, lorsque le chanvre placé dans les joints était pénétré d'humidité. Les conduites en pierre ont été

achevées à la fin du mois de mai dernier, et, depuis ce moment, l'eau coule dans la conduite. D'après des observations faites sur le tuyau vide, on a estimé à $0^m,3$ environ la quantité dont les points de la chaîne, quand le vent est le plus fort, s'écartent du plan vertical qui les contient dans l'état d'équilibre. La durée des oscillations est de 6 secondes pour l'allée et le retour. La première idée de cette entreprise, sur le succès de laquelle il ne reste actuellement aucun doute, est due à M. le comte de Chabrol. Les dimensions de la chaîne ont été calculées par l'auteur de ce Mémoire. Le travail a été dirigé par M. Cagniard-Latour, qui a bien voulu en communiquer la description. La dépense s'est élevée, tout compris, à environ 1800 francs.

93. On s'est uniquement attaché, dans le tableau qui précède, conformément à la nature et à l'objet de ce Mémoire, à rassembler des détails exacts et circonstanciés, propres à guider les constructeurs. Le lecteur qui n'aura pas craint d'étudier ces descriptions arides, reconnaîtra dans le nouveau mode de construction qui en est l'objet, une ressource précieuse pour l'économie publique, et un vaste champ ouvert au génie des artistes.

Il est vraisemblable que l'usage des ponts suspendus deviendra bientôt général; on formera par ce moyen des communications dans des lieux où il paraît actuellement impossible d'en obtenir. On ne trouvera pas plus difficile de construire avec des chaînes de fer un pont de 500 mètres d'ouverture, qu'il ne l'a paru de construire des voûtes en pierre de 60 mètres, des travées en bois de 119 mètres, et des arches en fer fondu de 73 mètres. On suspendra aux chaînes des tuyaux pour conduire les eaux, et même des aqueducs praticables aux grands bateaux. Ces constructions offriront des formes élégantes, invariablement fixées par les lois naturelles de l'équilibre; elles pourront également, dirigées par un ingénieur habile, contribuer à l'embellissement des capitales, ou, suspendues au travers des vallons escarpés, produire dans les sites pittoresques des pays de montagnes les effets les plus imposans. L'imagination trouvera dans ces édifices le spectacle de la puissance des arts, surmontant, pour l'utilité publique, de grands obstacles opposés par la nature, et long-temps jugés invincibles.

DEUXIÈME PARTIE.

RECHERCHES SUR L'ÉTABLISSEMENT DES PONTS SUSPENDUS.

94. L'ÉTABLISSEMENT d'une construction est l'ensemble des calculs au moyen desquels on vérifie que toutes les parties sont en équilibre, et qu'elles ont la stabilité et la force nécessaires pour résister aux efforts auxquels elles sont exposées.

Dans les constructions ordinaires, l'ingénieur dispose à son gré de la figure et des situations respectives des parties, et l'on peut souvent faire varier considérablement la distribution des poids dont elles sont chargées, sans que l'équilibre cesse de subsister. Il n'en est pas de même dans les constructions qui sont l'objet de ce Mémoire : l'équilibre des chaînes flexibles auxquelles les planchers sont suspendus, comporte nécessairement, pour chaque distribution des poids, une figure particulière. La première question qui se présente, est donc la détermination de la courbe suivant laquelle les chaînes se plieront d'elles-mêmes, pour demeurer en équilibre sous l'action de leur propre poids et du poids du plancher. La connaissance de cette courbe permettra de régler d'avance la longueur des tiges en fer par lesquelles le plancher est suspendu aux chaînes. La courbure des chaînes étant d'ailleurs susceptible d'être altérée par la présence des voitures auxquelles le pont donne passage, il faut pouvoir apprécier ces changemens, et déterminer la quantité dont une ou plusieurs voitures d'un poids donné pourront faire abaisser la partie du plancher où elles se trouveront placées.

La recherche des conditions de l'équilibre des chaînes conduit à celles des tensions qu'elles supportent, et des efforts qui s'exercent contre les appuis sur lesquels elles reposent, ou contre les points fixes auxquels les extrémités de ces chaînes sont attachées.

Les effets des secousses provenant du mouvement des voitures doivent être et sont effectivement plus sensibles dans des constructions offrant un système flexible, dont toutes les parties sont mobiles, et dont la matière est fort élastique. Ces effets sont de divers genres. On peut distinguer et considérer séparément, 1.° les *oscillations*, qui ont lieu lorsqu'un point a été dérangé de la situation d'équilibre, le système étant considéré comme flexible, mais non comme élastique; 2.° les *vibrations*, qui résultent des allongemens et accourcissemens alternatifs des parties élastiques de la construction. La

connaissance des lois de ces effets est nécessaire pour faire apprécier le degré de hardiesse des constructions que l'on projetterait dans la suite; et, dans une matière que l'expérience n'a pas encore suffisamment éclairée, on agirait en aveugle, si l'on ignorait comment les phénomènes dont il s'agit dépendent de la figure et de la masse des édifices.

§. I.er

De l'équilibre des chaînes.

95. Les conditions de l'équilibre d'une chaîne pesante et flexible, dont la première recherche est due à Jacques Bernouilly, sont exposées dans les traités élémentaires de mécanique. La solution a pour objet de déterminer la figure de la courbe, dans la supposition où elle est chargée uniquement par son propre poids, ou, ce qui revient au même, par des poids distribués uniformément sur la longueur. Ce problème est un cas particulier d'une question plus générale, dans laquelle on supposerait les poids distribués sur la courbe d'une manière variable et entièrement arbitraire. Quelle que soit d'ailleurs la distribution des poids, la courbe offre un caractère général, susceptible d'être exprimé par des relations différentielles, et qu'on peut trouver comme il suit.

Considérons un fil parfaitement flexible, attaché fixement au point A (*fig. 1, pl. XI*), que nous prenons pour l'origine des abscisses horizontales x et des ordonnées verticales y. A l'extrémité M de ce fil sont appliquées une force verticale P et une force horizontale Q; tous les points, dans l'intervalle AM, sont chargés par des poids. Il s'agit, ces poids étant connus, de déterminer la figure sous laquelle le fil se maintiendra en équilibre.

Le système étant supposé en équilibre, il est évident que la tension supportée par un élément quelconque mn de la courbe, considérée comme une force dirigée suivant la tangente de cette courbe au point m, doit faire équilibre à toutes les forces appliquées à la portion mOM. Cette tension doit donc, d'après les lois de la statique, être égale et directement opposée à la résultante de toutes ces forces, en supposant qu'on les applique au point m, sans en changer les grandeurs ni les directions. Par conséquent, si nous nommons T la tension dont il s'agit, x et y les coordonnées Ap, pm du point m, s l'arc Am, la composante horizontale $T\frac{dx}{ds}$ de la force T devra être égale à Q. La considération de la quantité désignée par Q est importante, et se représentera souvent dans les recherches suivantes. La force Q, qui, pour tous les points de la courbe, est égale à la composante horizontale de la tension, exprime dans les ponts l'effort horizontal qui tend à rapprocher les points fixes auxquels les chaînes sont attachées.

Nous désignerons souvent cette force sous le nom de *tension horizontale des chaînes*, en la distinguant de la *tension* proprement dite, représentée par T, qui s'exerce dans la direction de chaque élément de la courbe, et qui varie d'un point à un autre. La composante verticale de la tension T, exprimée par $T\frac{dy}{ds}$, devra être égale à $-P$ plus la somme des poids suspendus aux points de la courbe, depuis m jusqu'en M. Soit p le poids placé au point dont l'abscisse est x : p est une fonction donnée de x, et la valeur qu'elle représente est rapportée à l'unité de longueur de l'abscisse, en sorte que pdx représente le poids dont est chargé l'élément ds, qui se projette sur dx. Nous exprimerons de même par p' le poids suspendu au point dont l'abscisse serait x'. La somme des poids distribués dans l'intervalle mM sera donc représentée par l'intégrale définie $\int_x^a dx'.p'$, a étant l'abscisse AB du dernier point de la courbe. Ainsi nous aurons les deux équations

$$T\frac{dx}{ds}=Q, \qquad \text{(a)}$$

$$T\frac{dy}{ds}=-P+\int_x^a dx'.p'. \qquad \text{(b)}$$

96. On peut en obtenir une troisième de la manière suivante. En différenciant ces deux équations par rapport à x, on aura

$$dT.\frac{dx}{ds}+Td.\frac{dx}{ds}=0,$$

$$dT.\frac{dy}{ds}+Td.\frac{dy}{ds}=-pdx.$$

Multipliant la première par $\frac{dx}{ds}$, la seconde par $\frac{dy}{ds}$; ajoutant, et observant que $\frac{dx^2}{ds^2}+\frac{dy^2}{ds^2}=1$, et par conséquent $\frac{dx}{ds}d.\frac{dx}{ds}+\frac{dy}{ds}d.\frac{dy}{ds}=0$, il viendra

$$dT=-pdx.\frac{dy}{ds}. \qquad \text{(c)}$$

Cette équation exprime que la variation de la tension, quand on passe d'un point de la courbe au point suivant, est égale et de signe contraire au poids dont est chargé l'élément compris entre ces deux points, ce poids étant décomposé dans le sens de la courbe.

97. Nous avons supposé le poids appliqué au point m de la courbe donné en fonction de l'abscisse de ce point. On peut également regarder ce poids comme donné en fonction de l'arc s : alors p exprimera le poids correspondant à l'unité de longueur de la courbe, et pds le poids porté par l'élément ds de cette longueur. Les trois équations précédentes deviendront

$$T\frac{dx}{ds} = Q, \tag{d}$$

$$T\frac{dy}{ds} = -P + \int_s^S ds''.p', \tag{e}$$

$$dT = -p\,dy, \tag{f}$$

S représentant la longueur totale AmM.

98. Cette dernière forme est celle qu'il convient de donner aux équations d'équilibre, quand on veut résoudre la question de la chaînette. La charge étant alors supposée uniformément répartie sur la courbe, p est une constante exprimant le poids placé sur l'unité de longueur. L'équation (f) donne, en l'intégrant,

$$R - py = T, \tag{g}$$

R étant la constante introduite par l'intégration. Comme l'on a $T = R$ quand $y = 0$, on voit que R représente la tension qui a lieu dans le sens de la courbe à l'origine A des coordonnées; et l'on voit également que la tension qui aura lieu dans tout autre point de la courbe, sera égale à la tension R diminuée du poids py de l'ordonnée de ce point, l'ordonnée étant censée chargée de la même manière que la courbe. En mettant pour T la valeur qui résulte de l'équation (d), l'équation (g) donne

$$R - py = Q\frac{ds}{dx}, \text{ ou } R - py = Q\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}; \tag{h}$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{\sqrt{(R-py)^2 - Q^2}}{Q}, \quad dx = \pm\frac{Q\,dy}{\sqrt{(R-py)^2 - Q^2}},$$

le signe supérieur ayant lieu dans la partie de la courbe où y augmente avec x, et le signe inférieur dans la partie où y diminue quand x augmente. En intégrant, on a

$$x = const. \mp \frac{Q}{p}\log.\left[R - py + \sqrt{(R-py)^2 - Q^2}\right].$$

La constante doit être déterminée par la condition qu'on ait en même temps $x = 0$ et $y = 0$; et comme on doit, dans la partie de la courbe où l'origine est placée, prendre le signe supérieur du radical, il vient

$$x = \mp\frac{Q}{p}\log.\frac{R - py + \sqrt{(R-py)^2 - Q^2}}{R - \sqrt{R^2 - Q^2}}. \tag{i}$$

On en déduit, en repassant des logarithmes aux nombres, et représentant par e la base des logarithmes hyperboliques $= 2,718282$,

$$R - py = \tfrac{1}{2}(R - \sqrt{R^2 - Q^2})e^{\frac{px}{Q}} + \tfrac{1}{2}\frac{Q^2}{R - \sqrt{R^2 - Q^2}}.e^{-\frac{px}{Q}}. \tag{k}$$

99. En supposant $\frac{dy}{dx}=0$ dans l'équation (h), elle donnera la valeur de y appartenant au point O le plus bas de la courbe. Désignant cette valeur par f, on a donc

$$f=\frac{R-Q}{p}. \tag{l}$$

Représentant par h l'abscisse du même point, l'équation (i) donne, en remplaçant y par cette valeur,

$$h=\frac{Q}{p}\log.\frac{Q}{R-\sqrt{R^2-Q^2}}. \tag{m}$$

100. Lorsque p est constante, le terme $\int_s^S ds'.p'$, qui fait partie de l'équation (e), devient $p(S-s)$. Cette équation donne donc

$$T\frac{dy}{ds}=-P+p(S-s);$$

et en divisant par l'équation (d), on a

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-P+p(S-s)}{Q}.$$

Égalant cette valeur à celle de $\frac{dy}{dx}$ qui a été déduite de l'équation (h), on trouve

$$ps=pS-P\mp\sqrt{(R-py)^2-Q^2}.$$

Les signes supérieur et inférieur doivent être pris respectivement pour les parties de la courbe situées à droite et à gauche du point O, dans lequel le radical est nul. Si la courbe se termine en ce point, on a $P=0$.

101. Nous nommerons b l'ordonnée BM du point extrême M du fil. L'équation (g) donnera donc $R-pb$ pour la tension qui a lieu en ce point. Or cette tension est évidemment égale, dans l'état d'équilibre, à la résultante des deux forces représentées ci-dessus par P et Q. Donc

$$P=\sqrt{(R-pb)^2-Q^2};$$

ce qui change l'équation précédente en

$$ps=pS-\sqrt{(R-pb)^2-Q^2}\mp\sqrt{(R-py)^2-Q^2}; \tag{n}$$

et il ne reste plus, dans nos relations entre x, y et s, que les constantes Q et R, que l'on pourra toujours déterminer d'après les données de chaque question. L'équation (g) donnera la valeur de la tension pour chaque point de la courbe.

102. Représentons par c l'arc AO compris entre l'extrémité A et le point le plus

bas de la courbe : le radical $\sqrt{(R-py)^2-Q^2}$ étant nul en ce point, on a, d'après l'équation (n),

$$pc = pS - \sqrt{(R-pb)^2-Q^2},$$

et cette équation peut s'écrire ainsi :

$$ps = pc \mp \sqrt{(R-py)^2-Q^2}.$$

Mais, puisque la tension est par-tout exprimée par $R-py$, et que la composante horizontale de cette tension est par-tout égale à Q, on voit que le radical $\sqrt{(R-py)^2-Q^2}$ en représente, pour tous les points de la courbe, la composante verticale. On a donc, pour la valeur de cette composante,

$$\mp\sqrt{(R-py)^2-Q^2} = ps - pc,$$

le signe supérieur ayant lieu à gauche du point O, et le signe inférieur à droite de ce point. On conclut de ce résultat que l'effort exercé verticalement sur le point fixe A est égal au poids pc de la portion de courbe AO comprise entre ce point et le sommet O; et de même, que l'effort vertical exercé sur le point fixe placé à l'extrémité M est égal au poids $p(S-c)$ de la portion de courbe OM comprise entre ce point et le sommet O. Le point le plus bas, ou le sommet de la courbe, la partage donc en deux parties, dont chacune pèse sur le point fixe auquel elle se trouve attachée. Cette circonstance n'est pas particulière à la chaînette ; elle subsiste, quelles que soient la distribution de la charge et la nature de la courbe formée par le fil.

103. En substituant la valeur de P (101) dans celle de $\frac{dy}{dx}$ (100), on trouve

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sqrt{(R-pb)^2-Q^2}+p(S-s)}{Q}.$$

Par conséquent, si l'on nomme α, α' les inclinaisons de la tangente de la courbe aux extrémités A et M sur l'axe horizontal Ax, nous aurons

$$\left.\begin{aligned} \text{tang } \alpha &= \frac{-\sqrt{(R-pb)^2-Q^2}+pS}{Q}, \quad \text{ou tang. } \alpha = \frac{pc}{Q}; \\ \text{tang. } \alpha' &= \frac{-\sqrt{(R-pb)^2-Q^2}}{Q}, \quad \text{ou tang. } \alpha' = \frac{p(c-S)}{Q}. \end{aligned}\right\} \text{(o)}$$

104. L'expression générale du rayon de courbure est, comme l'on sait,

$$\pm \frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}:$$

en substituant dans cette formule les valeurs des coefficiens différentiels donnés par l'équation (k), on trouve, pour la valeur du rayon de courbure dans la chaînette,

$$-\frac{(R-py)^2}{pQ}; \qquad \text{(p)}$$

par conséquent, dans le point le plus bas O, la valeur de ce rayon est $-\frac{Q}{p}$.

105. Les équations précédentes se simplifient beaucoup lorsque l'on transporte l'origine des coordonnées en un point A' (fig. 2) situé dans la verticale contenant le point O, la distance OA' étant égale à $\frac{Q}{p}$; et quand on compte les nouvelles ordonnées verticales y' de bas en haut. En effet, posant

$$x'=x-h, \qquad \text{ou} \quad x'=x-\frac{Q}{p}\log.\frac{Q}{R-\sqrt{R^2-Q^2}},$$

$$y'=\frac{Q}{p}+f-y, \qquad py'=R-py,$$

il viendra

$$T=py', \qquad \text{(q)}$$

$$x'=\mp\frac{Q}{p}\log.\frac{py'+\sqrt{p^2y'^2-Q^2}}{Q}, \qquad \text{(r)}$$

$$y'=\frac{Q}{2p}\left(e^{\frac{px'}{Q}}+e^{-\frac{px'}{Q}}\right), \qquad \text{(s)}$$

$$ps'=\mp\sqrt{p^2y'^2-Q^2}, \qquad \text{(t)}$$

l'arc s' étant compté du point O. Enfin l'expression du rayon de courbure sera

$$\frac{py'^2}{Q}. \qquad \text{(u)}$$

106. Ces dernières équations ne contiennent plus que la constante Q, représentant la force horizontale qui doit être appliquée à chaque extrémité de la courbe, et qui, dans tous les points, est égale à la composante horizontale de la tension T. La valeur de Q se calcule immédiatement au moyen de l'équation (t), quand on se donne la longueur du fil et l'ordonnée du point extrême. Si nous regardons toujours A comme l'extrémité de la courbe, et si nous continuons à désigner l'arc OA par c, et la distance CO par f, l'ordonnée $A'C$ du point A sera égale à $f+\frac{Q}{p}$, et l'équation (t) donnera

$$pc=-\sqrt{(pf+Q)^2-Q^2}, \text{ d'où } Q=p\,.\frac{c^2-f^2}{2f}. \qquad \text{(v)}$$

En substituant cette valeur dans l'équation (r), où l'on fera en même temps

$y' = f + \frac{Q}{p}$, on trouvera pour l'abscisse AC du point extrême, que nous avons nommée h,

$$h = -\frac{c^2 - f^2}{2f} \log. \frac{c+f}{c-f}. \qquad \text{(x)}$$

La tension qui a lieu dans le sens de la courbe au point O, est égale à Q. Elle augmente de part et d'autre de ce point, et au point extrême A, la valeur de cette tension, représentée ci-dessus par R, est $pf + Q$; en sorte que

$$R = p \cdot \frac{c^2 + f^2}{2f}. \qquad \text{(y)}$$

L'angle que la courbe forme au point A avec l'horizon, est donné par l'équation

$$\text{tang. } \alpha = \frac{2cf}{c^2 - f^2}. \qquad \text{(z)}$$

107. Si, au lieu de se donner la longueur $AO = c$ du fil, on se donnait, avec la flèche $CO = f$, la demi-corde $AC = h$, il faudrait substituer pour x' et y' les valeurs h et $f + \frac{Q}{p}$ dans l'équation (r); ce qui donnerait

$$h = \frac{Q}{p} \log. \frac{pf + Q + \sqrt{(pf + Q)^2 - Q^2}}{Q}. \qquad \text{(aa)}$$

Posant $m = \frac{p}{Q}$, il vient

$$h = \frac{1}{m} \log. \left[1 + mf + \sqrt{(1 + mf)^2 - 1}\right]. \qquad \text{(bb)}$$

On chercherait par approximation une valeur de m qui satisfît à cette équation, et l'on prendrait ensuite $Q = \frac{p}{m}$. La tension à l'extrémité A se calculerait par l'équation $R = pf + Q$, article 99. L'équation (t) donnerait la longueur de la courbe. On connaîtrait enfin l'inclinaison de cette courbe au point A par l'équation tang. $\alpha = \frac{pc}{Q}$, article 103.

On ne doit point oublier, en employant les formules précédentes, que le logarithme qu'elles contiennent est hyperbolique; en sorte que, si l'on prend ce logarithme dans les tables ordinaires, il faut multiplier les nombres donnés par ces tables par 2,302585.

108. L'objet de ce mémoire exigeait que l'on rappelât ainsi les résultats connus relatifs au problème de la chaînette, en les présentant sous une forme propre à faciliter les applications. On emploiera les formules précédentes lorsque le plancher suivra la courbure des chaînes, comme dans le pont qui avait été projeté pour le Rhin. Dans la plupart des constructions dont il s'agit, le plancher est dirigé en ligne droite, ou

s'écarte très-peu de cette direction, tandis que la courbure des chaînes est beaucoup plus grande. Toutes les parties de ce plancher étant égales entre elles, la charge qu'il produit peut être censée distribuée uniformément sur une ligne horizontale. Il n'en est pas de même du poids des chaînes : mais comme, d'une part, l'amplitude de l'arc qu'elles forment est généralement peu considerable, en sorte que les élémens extrêmes sont peu inclinés sur l'horizon ; et comme, d'autre part, le poids de ces chaînes n'est qu'une petite portion de la charge totale, on s'éloigne peu de la vérité en supposant cette charge distribuée uniformément sur la ligne horizontale placée au-dessous de la courbe. La figure des chaînes déterminée par cette condition ne recevra, dans l'exécution que des modifications très-légères, et on peut prendre l'hypothèse dont il s'agit pour la base des calculs servant à l'établissement des ponts.

109. On doit alors employer les équations (a) et (b), article 95. La charge étant supposée distribuée uniformément sur l'horizontale AB (fig. 3, pl. XI), p est une constante exprimant le poids porté par chaque unité de longueur de cette ligne. Ces équations, en désignant par a l'abscisse AB du point extrême M, deviennent donc

$$T\frac{dx}{ds}=Q,$$

$$T\frac{dy}{ds}=-P+p(a-x);$$

et en les divisant l'une par l'autre, on a

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-P+p(a-x)}{Q}.$$

Cette dernière équation, en supposant $x=0$, donnera la valeur de la tangente trigonométrique de l'angle formé avec l'axe Ax par la tangente de la courbe à l'extrémité A : par conséquent, si α représente cet angle, on peut écrire

$$\frac{dy}{dx}=\text{tang. }\alpha-\frac{px}{Q}. \tag{1}$$

En intégrant, on trouve

$$y=x\text{ tang. }\alpha-\frac{px^2}{2Q}, \tag{2}$$

et il n'y a point de constante à ajouter, puisqu'on doit avoir en même temps $x=0$ et $y=0$.

110. Nommons a, b les coordonnées AB, BM du point extrême M : en les substituant dans l'équation précédente, elle donnera

$$b=a\text{ tang. }\alpha-\frac{pa^2}{2Q},\quad\text{ou}\quad\text{tang. }\alpha=\frac{b}{a}+\frac{pa}{2Q}. \tag{3}$$

En mettant à la place de tang. α cette valeur, l'équation (2) devient

$$y = \frac{bx}{a} + \frac{p(ax - x^2)}{2Q};$$

et si l'on suppose $x = \frac{a}{2}$, elle donnera pour y la valeur de l'ordonnée DN menée à égale distance des points A et B. La tangente à la courbe au point N est parallèle à la ligne AM, et comme DG est égale à $\frac{b}{2}$, on voit qu'en désignant par g la distance GN, qu'on peut nommer la flèche verticale de la courbe, on a

$$g = \frac{pa^2}{8Q}; \text{ d'où } Q = \frac{pa^2}{8g}, \text{ et tang. } \alpha = \frac{b + 4g}{a}; \tag{4}$$

ce qui détermine les constantes qui entrent dans l'équation (2) en fonction des coordonnées a, b du point extrême M et de la flèche verticale g ou DN.

111. On peut aussi déterminer ces constantes en fonction de l'ordonnée du point O de la courbe, qui est situé le plus bas, et où la tangente est horizontale. Soient h et f l'abscisse AC et l'ordonnée CO de ce point. L'équation (1) doit donner $\frac{dy}{dx} = 0$ quand $x = h$: donc

$$\text{tang. } \alpha = \frac{ph}{Q}. \tag{5}$$

L'équation (2) donne de plus, en y supposant $x = h$ et $y = f$,

$$f = h \text{ tang. } \alpha - \frac{ph^2}{2Q}, \text{ ou } f = \frac{Q \text{ tang.}^2 \alpha}{2p}.$$

Combinant ces équations avec l'équation (3), il viendra

$$h = \frac{af}{f + \sqrt{f^2 - bf}}, \tag{6}$$

$$\text{tang. } \alpha = \frac{2}{a}(f + \sqrt{f^2 - bf}), \tag{7}$$

$$Q = \frac{pa^2}{4f + 4\sqrt{f^2 - bf} - 2b}. \tag{8}$$

Les constantes tang. α et Q étant ainsi déterminées, l'équation (2) donnera la figure de la courbe. La tension, qui au point O est égale à Q, se calculera pour tout autre point par l'équation $T = Q\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$, ou

$$T = Q\sqrt{1 + \left(\text{tang. } \alpha - \frac{px}{Q}\right)^2}; \tag{9}$$

en sorte qu'aux points extrêmes A et M les valeurs de cette tension sont respectivement

$$Q\sqrt{1 + \text{tang.}^2 \alpha} \text{ ou } \frac{Q}{\cos. \alpha}, \text{ et } Q\sqrt{1 + \left(\text{tang. } \alpha - \frac{pa}{Q}\right)^2}. \tag{10}$$

Les composantes verticales de ces dernières tensions, ou les efforts exercés verticalement sur les points fixes A et M, auxquels le fil est attaché, sont respectivement

$$ph \text{ et } p(a-h). \qquad (11)$$

112. Pour connaître maintenant la longueur de la courbe entre les points A et M, on remarquera qu'en nommant s l'arc correspondant à l'abscisse x, on a

$$s=\int dx\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}=\int dx\sqrt{1+\left(\text{tang.}\,\alpha-\frac{px}{Q}\right)^2};$$

et en effectuant l'intégration,

$$s=const.-\frac{Q}{2p}\left[\left(\text{tang.}\alpha-\frac{px}{Q}\right)\sqrt{1+\left(\text{tang.}\alpha-\frac{px}{Q}\right)^2}+\log.\left(\text{tang.}\alpha-\frac{px}{Q}+\sqrt{1+\left(\text{tang.}\alpha-\frac{px}{Q}\right)^2}\right)\right].$$

Si l'arc s est compté du point A, on a en même temps $x=0$ et $s=0$. La valeur complète de s est donc

$$\begin{aligned}s=&\frac{Q}{2p}\left[\text{tang.}\,\alpha\sqrt{1+\text{tang.}^2\alpha}+\log.\left(\text{tang.}\,\alpha+\sqrt{1+\text{tang.}^2\alpha}\right)\right]\\&-\frac{Q}{2p}\left[\left(\text{tang.}\,\alpha-\frac{px}{Q}\right)\sqrt{1+\left(\text{tang.}\,\alpha-\frac{px}{Q}\right)^2}+\log.\left(\text{tang.}\,\alpha-\frac{px}{Q}+\sqrt{1+\left(\text{tang.}\alpha-\frac{px}{Q}\right)^2}\right)\right],\end{aligned} \quad (12)$$

formule d'où l'on conclura la valeur de l'arc AM, en y faisant $x=a$.

Dans la plupart des applications, le rapport $\frac{dy}{dx}$ est une petite fraction, et il est préférable, pour calculer la longueur de la courbe, de développer l'intégrale précédente en série. On trouve alors, au lieu de la formule (12),

$$\begin{aligned}s=x&+\frac{Q}{p}\left(\frac{1}{3.2}\text{tang.}^3\,\alpha-\frac{1}{5.8}\text{tang.}^5\,\alpha+\frac{1}{7.16}\text{tang.}^7\,\alpha-\frac{5}{9.128}\text{tang.}^9\,\alpha+\&c.\right)\\&-\frac{Q}{p}\left(\frac{1}{3.2}\left(\text{tang.}\,\alpha-\frac{px}{Q}\right)^3-\frac{1}{5.8}\left(\text{tang.}\,\alpha-\frac{px}{Q}\right)^5+\frac{1}{7.16}\left(\text{tang.}\alpha-\frac{px}{Q}\right)^7-\&c.\right),\end{aligned} \quad (13)$$

où il faudra également faire $x=a$ pour avoir la longueur totale de la courbe, et où l'on mettra pour tang. α et Q les valeurs données par les équations (7) et (8).

113. Les résultats précédens se présentent sous une forme plus simple quand l'origine des coordonnées est placée au sommet O, supposition qui convient au cas où la courbe que l'on considère est composée de deux parties symétriques séparées par ce point. Nommant x' la nouvelle abscisse horizontale comptée du point O (fig. 4, pl. XI), y' la nouvelle ordonnée verticale, qui se comptera de bas en haut, et h, f désignant toujours les cordonnées de l'extrémité A, nous aurons

$$x = x' + h \quad \text{ou} \quad x = x' + \frac{Q \operatorname{tang.} \alpha}{p},$$

$$y = f - y' \qquad y = \frac{Q \operatorname{tang.}^2 \alpha}{2p} - y'.$$

L'équation (3) se réduit à

$$y' = \frac{p x'^2}{2Q}; \tag{14}$$

et comme cette équation doit être satisfaite par les coordonnées h et f, il viendra

$$y' = \frac{f x'^2}{h^2}, \tag{15}$$

$$\operatorname{tang.} \alpha = \frac{ph}{Q} \quad \text{ou} \quad \operatorname{tang.} \alpha = \frac{2f}{h} \tag{16}$$

$$Q = \frac{ph}{\operatorname{tang.} \alpha} \quad \text{ou} \quad Q = \frac{ph^2}{2f}. \tag{17}$$

La tension en un point quelconque de la courbe sera donnée par l'expression

$$T = Q \sqrt{1 + \frac{p^2 x'^2}{Q^2}} \quad \text{ou} \quad T = \frac{ph^2}{2f} \sqrt{1 + \frac{4f^2 x'^2}{h^4}}; \tag{18}$$

en sorte qu'on aura pour la valeur de cette tension au point A

$$\frac{ph}{2f} \sqrt{h^2 + 4f^2}. \tag{19}$$

114. Enfin la longueur de l'arc de la courbe compté à partir du point O, et que nous désignerons par s', aura pour expression

$$s' = \tfrac{1}{2} x' \sqrt{1 + \frac{4f^2 x'^2}{h^4}} + \frac{h^2}{4f} \log. \left(\frac{2fx'}{h^2} + \sqrt{1 + \frac{4f^2 x'^2}{h^4}} \right): \tag{20}$$

ou, si l'on développe en série,

$$s' = x' + \frac{h^2}{2f} \left[\frac{1}{3.2} \left(\frac{2fx'}{h^2} \right)^3 - \frac{1}{5.8} \left(\frac{2fx'}{h^2} \right)^5 + \frac{1}{7.16} \left(\frac{2fx'}{h^2} \right)^7 - \frac{5}{9.128} \left(\frac{2fx'}{h^2} \right)^9 + \&c. \right]; \tag{21}$$

en sorte que la longueur de l'arc OA se terminant aux points dont les coordonnées sont h et f, longueur que nous désignerons par c, est

$$c = h \left[1 + \frac{1}{3.2} \left(\frac{2f}{h} \right)^2 - \frac{1}{5.8} \left(\frac{2f}{h} \right)^4 + \frac{1}{7.16} \left(\frac{2f}{h} \right)^6 - \frac{5}{9.128} \left(\frac{2f}{h} \right)^8 + \&c. \right] \tag{22}$$

115. Les recherches suivantes exigent qu'on ait une formule inverse de celle-ci, au moyen de laquelle on puisse calculer la flèche que prendra la courbe, la longueur de cette courbe étant connue. On peut déduire cette formule de l'équation (22) par les procédés connus servant au retour des suites. Supposons en effet

$$z = \alpha t^2 + \beta t^4 + \gamma t^6 + \delta t^8 + \&c.:$$

nous en déduirons

$$t^2 = \frac{1}{\alpha}\left(z - \frac{\beta}{\alpha^2}\, z^2 - \frac{\alpha\gamma - 2\beta^2}{\alpha^4}\, z^3 - \frac{\delta\alpha^2 - 5\alpha\beta\gamma + 5\beta^3}{\alpha^6}\, z^4 - \&c.\right);$$

et en comparant cette équation à l'équation (22), nous aurons

$$z = \frac{c-h}{h},\ t = \frac{2f}{h},\ \alpha = \frac{1}{6},\ \beta = -\frac{1}{40},\ \gamma = \frac{1}{112},\ \delta = -\frac{5}{1152},\ \&c.$$

On trouve ainsi, pour la formule cherchée,

$$\left(\frac{2f}{h}\right)^2 = 6\left[\frac{c-h}{h} + \frac{9}{10}\left(\frac{c-h}{h}\right)^2 - \frac{54}{175}\left(\frac{c-h}{h}\right)^3 + \frac{207}{350}\left(\frac{c-h}{h}\right)^4 - \&c.\right]. \quad (23)$$

On pourra toujours, au moyen des résultats précédens, se rendre compte exactement de la figure et de la longueur des chaînes, des tensions auxquelles les diverses parties sont soumises, et des efforts exercés aux points extrêmes. Ces résultats mettront à même de fixer, comme on le verra dans la suite, les dimensions à donner aux anneaux dont ces chaînes seront formées, pour les rendre capables de supporter, sans se rompre, les charges réparties sur le plancher du pont.

§. II.

De l'action des fardeaux placés sur le plancher d'un pont pour changer la figure des chaînes et en augmenter la tension.

116. La construction étant supposée en équilibre sous l'action du poids du plancher, la première question qui se présente est celle du changement qui peut survenir dans les conditions de cet équilibre par l'effet du passage des voitures. Ce n'est point dans le cas où plusieurs voitures placées les unes à la suite des autres occuperaient la totalité ou une grande partie de la longueur du pont, que le changement de la courbe des chaînes serait le plus sensible : l'effet de la présence de ces voitures serait alors d'augmenter la tension des chaînes, mais non d'en modifier sensiblement la figure. Cette figure changera davantage, si une ou un petit nombre de voitures très-pesantes se trouvent seules vers le milieu de la longueur du pont.

Considérons d'abord, pour plus de généralité, un fil flexible AM (fig. 5, pl. XI), dont les extrémités fixes A et M ne sont pas à la même hauteur. Ce fil étant chargé par des poids uniformément répartis sur AB, et p représentant le poids placé sur l'unité de longueur de cette ligne, la figure de la courbe AM et la tension de cette courbe seront données par les résultats des articles 109 et suivans. Supposons ensuite que l'on place sur une portion quelconque $p'p''$ de l'intervalle AB un poids addi-

tionnel Π, réparti uniformément sur cette portion; il s'agit de connaître le changement qui en résultera dans la figure et dans la tension du fil.

Les questions de ce genre se résolvent d'après les considérations suivantes. On voit en premier lieu que chacune des portions du fil Am', $m'm''$, $m''M$, étant chargée par des poids uniformément répartis sur les parties de ligne droite correspondantes Ap', $p'p''$, $p''B$, forme nécessairement une courbe à laquelle on peut appliquer les résultats obtenus dans le paragraphe précédent. Il est évident aussi que la composante horizontale de la tension, représentée par Q dans ce paragraphe, doit avoir une valeur commune dans les trois portions du fil, puisque cette composante doit par-tout être égale aux efforts exercés horizontalement sur les deux extrémités fixes A, M. On reconnaît enfin que l'équilibre du fil exige que deux parties consécutives aient une tangente commune au point de jonction m' ou m''. En effet, la tension au point m', ce point étant considéré comme l'extrémité de la portion Am', doit être égale et directement opposée à la tension au même point, considéré comme l'extrémité de la portion mm'; ou, ce qui revient au même, les valeurs et les directions des deux tensions ne peuvent différer que d'une quantité infiniment petite, si, comme on le suppose, il n'y a pas de poids particulier placé au point m'.

Nommons x', x'' les distances Ap' et Ap''; y' et y'' les ordonnées $p'm'$ et $p''m''$. L'angle que la tangente à la courbe au point A forme avec l'axe horizontal Ax étant toujours désigné par α, nommons α', α'', les angles que forment avec le même axe les tangentes aux points m', m''. Soit Q' la valeur que prend la tension horizontale, par suite de la répartition du poids Π dans l'espace $p'p''$. Les équations (1) et (3) du paragraphe précédent donneront pour la portion de courbe Am' (en mettant x' au lieu de a, et y' au lieu de b),

$$\text{tang. } \alpha = \frac{y'}{x'} + \frac{px'}{2Q'},$$

$$\text{tang. } \alpha' = \text{tang. } \alpha - \frac{px'}{Q'}, \text{ ou tang. } \alpha' = \frac{y'}{x'} - \frac{px'}{2Q'}.$$

Les mêmes équations donneront pour la portion de courbe $m'm''$ (en mettant $x''-x'$ au lieu de a, $y''-y'$ au lieu de b, $p+\frac{\Pi}{x''-x'}$ au lieu de p),

$$\text{tang. } \alpha' = \frac{y''-y'}{x''-x'} + \frac{p(x''-x')+\Pi}{2Q'},$$

$$\text{tang. } \alpha'' = \text{tang. } \alpha' - \frac{p(x''-x')+\Pi}{Q'}, \text{ ou tang. } \alpha'' = \frac{y''-y'}{x''-x'} - \frac{p(x''-x')+\Pi}{2Q'}.$$

Enfin on aura dans la portion de courbe $m''M$ (en mettant $a-x''$ pour a, et $b-y''$ pour b)

$$\text{tang. } \alpha'' = \frac{b-y''}{a-x''} + \frac{p(a-x'')}{2Q'}.$$

117. Au moyen de ces cinq équations, on trouve d'abord

$$\left.\begin{aligned} y' &= \frac{bx'}{a} + \frac{pax'(a-x') + \Pi x'(2a-x'-x'')}{2Q'a}, \\ y'' &= \frac{bx''}{a} + \frac{pax''(a-x'') + \Pi(a-x'')(x'+x'')}{2Q'a}. \end{aligned}\right\}(1)$$

On a ensuite

$$\left.\begin{aligned} \text{tang.}\,\alpha &= \frac{b}{a} + \frac{pa^2 + \Pi(2a-x'-x'')}{2Q'a}, \\ \text{tang.}\,\alpha' &= \frac{b}{a} + \frac{pa(a-2x') + \Pi(2a-x'-x'')}{2Q'a}, \\ \text{tang.}\,\alpha'' &= \frac{b}{a} + \frac{pa(a-2x'') - \Pi(x'+x'')}{2Q'a}. \end{aligned}\right\}(2)$$

118. La formule (13), article 112, donne d'ailleurs pour la longueur de la portion de courbe Am', en écrivant x' au lieu de x, et Q' au lieu de Q,

$$x' + \frac{Q'}{p}\left(\frac{1}{6}\,\text{tang.}^3\,\alpha - \frac{1}{40}\,\text{tang.}^5\,\alpha + \frac{1}{112}\,\text{tang.}^7\,\alpha - \&\text{c.}\right)$$
$$- \frac{Q'}{p}\left(\frac{1}{6}\left(\text{tang.}\,\alpha - \frac{px'}{Q'}\right)^3 - \frac{1}{40}\left(\text{tang.}\,\alpha - \frac{px'}{Q'}\right)^5 + \&\text{c.}\right).$$

La même formule donne pour la longueur de la portion du courbe $m'm''$, en écrivant $x''-x'$ au lieu de x, tang. α' au lieu de tang. α, $p + \frac{\Pi}{x''-x'}$, au lieu de p, et Q' au lieu de Q,

$$x''-x' + \frac{Q'(x''-x')}{p(x''-x')+\Pi}\left(\frac{1}{6}\,\text{tang.}^3\,\alpha' - \frac{1}{40}\,\text{tang.}^5\,\alpha' + \frac{1}{112}\,\text{tang.}^7\,\alpha' - \&\text{c.}\right)$$
$$- \frac{Q'(x''-x')}{p(x''-x')+\Pi}\left(\frac{1}{6}\left(\text{tang.}\,\alpha' - \frac{p(x''-x')+\Pi}{Q'}\right)^3 - \frac{1}{40}\left(\text{tang.}\,\alpha' - \frac{p(x''-x')+\Pi}{Q'}\right)^5 + \text{etc.}\right).$$

Enfin, en écrivant dans cette formule $a - x''$ au lieu de x, tang. α'' au lieu de tang α, et Q' au lieu de Q, on aura pour la longueur de la portion de courbe $m''M$,

$$a - x'' + \frac{Q'}{p}\left(\frac{1}{6}\,\text{tang.}^3\,\alpha'' - \frac{1}{40}\,\text{tang.}^5\,\alpha'' + \frac{1}{112}\,\text{tang.}^7\,\alpha'' - \&\text{c.}\right)$$
$$- \frac{Q'}{p}\left(\frac{1}{6}\,\text{tang.}\,\alpha'' - \frac{p(a-x'')}{Q'}\right)^3 - \frac{1}{40}\left(\text{tang.}\,\alpha'' - \frac{p(a-x'')}{Q'}\right)^5 + \&\text{c.}\Big).$$

Le fil étant supposé inextensible, et la longueur totale n'ayant point varié par l'effet de la surcharge placée dans une des parties, la somme de ces trois quantités doit donner la longueur connue de ce fil, que nous représentons par c. Par conséquent, égalant c à la somme dont il s'agit, et remplaçant tang. α, tang. α' et tang. α'' par les valeurs (2), on aura une équation entre c et la nouvelle valeur inconnue Q' qu'a prise la tension horizontale dans le fil. On cherchera, par des essais successifs, la valeur de Q' qui satisfait à cette équation. On connaîtra ainsi l'augmentation de tension

horizontale causée par la surcharge. En substituant la valeur trouvée pour Q' dans les expressions (1) de y' et y'', puis comparant les valeurs que prendront alors ces expressions avec les valeurs primitives des ordonnées des points du fil correspondant aux abscisses x', x'', on connoîtra l'abaissement des points m', m''. La situation de ces points étant déterminée, la figure de chacune des parties de la courbe sera donnée séparément par les résultats des articles 109 et suivans. Le calcul de la valeur de Q' n'est pas aussi pénible qu'il peut le paraître au premier coup-d'œil, parce qu'on trouvera d'abord, par l'équation (8), article 111, une valeur approchée, mais trop grande de cette quantité, en supposant le poids Π distribué uniformément sur la longueur entière du fil; qu'on en approchera davantage en ne prenant d'abord que le premier terme des séries précédentes; et qu'en prenant les deux premiers termes, on aura, dans les cas ordinaires des applications, la valeur cherchée avec toute l'exactitude que l'on peut desirer.

119. Au lieu de supposer le poids Π distribué sur une portion de la longueur du fil, on peut le supposer placé dans un seul point de cette longueur (fig. 6, pl. XI). Les formules précédentes s'appliqueront à cette hypothèse en supposant $x'' = x'$, la lettre x' représentant l'abscisse du point m' où le poids est placé. Les expressions (1) deviennent alors

$$y' = y'' = \frac{bx'}{a} + \frac{pax'(a-x') + 2\Pi x'(a-x')}{2Q'a}. \qquad (3)$$

Les équations (2) donnent

$$\left.\begin{aligned} \text{tang. } \alpha &= \frac{b}{a} + \frac{pa^2 + 2\Pi(a-x')}{2Q'a}, \\ \text{tang. } \alpha' &= \frac{b}{a} + \frac{pa(a-2x') + 2\Pi(a-x')}{2Q'a}, \\ \text{tang. } \alpha'' &= \frac{b}{a} + \frac{pa(a-2x') - 2\Pi x'}{2Q'a}. \end{aligned}\right\} (4)$$

L'angle α' représente l'inclinaison du dernier élément de la portion de courbe Am', et l'angle α'' celle du premier élément de la portion de courbe $m'M$. Ces deux portions de courbe forment entre elles, par suite de la concentration du poids Π en un seul point, un angle fini au point de jonction. Cet angle doit être tel, que les tensions des deux élémens extrêmes des portions dont il s'agit fassent équilibre au point Π; ou, si l'on veut, que la somme des composantes verticales de ces tensions soit égale à ce poids. Ainsi, la composante horizontale des tensions étant Q', et par conséquent les composantes verticales Q' tang. α', Q' tang. α'', on doit avoir

$$Q'(\text{tang. } \alpha' - \text{tang. } \alpha'') = \Pi,$$

condition à laquelle satisfont effectivement les valeurs précédentes. On emploiera les

équations (3) et (4), pour trouver le changement de figure et de tension du fil, de la manière expliquée dans l'article précédent, avec la seule différence que la longueur de la partie intermédiaire du fil étant nulle, on n'a plus à considérer que les parties extrêmes:

Dans le plus grand nombre des applications, les deux extrémités fixes du fil seront placées à la même hauteur : les résultats des articles précédens s'appliqueront à ce cas, en supposant $b = 0$.

120. Admettons maintenant, en supposant les deux extrémités fixes du fil placées à la même hauteur, que le poids Π soit distribué uniformément sur une portion $p'p''$ de AB partagée en deux parties égales par le milieu C de cette ligne; le fil ne cessera point d'être partagé en deux parties symétriques par la verticale CO. Nommons $2h$ l'intervalle AB, et $2h'$ l'intervalle $p'p''$. Après avoir fait $b = 0$ dans les formules (1) et (2), il faudra écrire $2h$ à la place de a, $h-h'$ à la place de x', et $h+h'$ à la place de x''. Les formules (1) donneront alors

$$y' = y'' = \frac{p(h^2 - h'^2) + \Pi(h - h')}{2Q'}; \qquad (5)$$

et les formules (2),

$$\left.\begin{aligned} &\text{tang. } \alpha = \frac{2ph + \Pi}{2Q'}, \\ &\text{tang. } \alpha' = -\text{tang. } \alpha'' = \frac{2ph' + \Pi}{2Q'}. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

On emploiera ces formules pour trouver le changement de figure du fil, de la manière indiquée article 118. L'expression de la demi-longueur $Am'O$ du fil sera ici

$$\begin{aligned} c = h + \frac{Q'}{p}\left(\frac{1}{6}\,\frac{(2ph+\Pi)^3 - (2ph'+\Pi)^3}{(2Q')^3} - \frac{1}{40}\,\frac{(2ph+\Pi)^5 - (2ph'+\Pi)^5}{(2Q')^5} + \&c.\right) \\ + \frac{2Q'h'}{2ph'+\Pi}\left(\frac{1}{6}\left(\frac{2ph'+\Pi}{2Q'}\right)^3 - \frac{1}{40}\left(\frac{2ph'+\Pi}{2Q'}\right)^5 + \&c.\right). \qquad (7) \end{aligned}$$

Après avoir trouvé la valeur de Q' qui satisfait à cette équation, on la substituera dans l'équation (5), qui donnera l'ordonnée des points m' et m''. On pourra ensuite calculer l'ordonnée CO du point milieu de la courbe, en observant que, si cette ordonnée est désignée par f', on aura $f' - y'$ pour la flèche de courbure de la portion de courbe $m'Om''$. Or la formule (16), article 113, donne en y mettant h' au lieu de h, $f' - y'$ au lieu de f, et au lieu de tang. α, la valeur (6) de tang. α',

$$f' - y' = \frac{2ph'^2 + \Pi h'}{4Q'};$$

d'où l'on tire, en substituant pour y' la valeur (5),

$$f' = \frac{2ph^2 + \Pi(2h - h')}{4Q'}. \qquad (8)$$

La comparaison de la valeur de f', donnée par cette formule, avec la valeur primitive f de la flèche de courbure du fil, donnée par la formule (17), article 113, fera connaître l'abaissement du point milieu, par suite de l'action du poids Π.

121. Le poids Π produira évidemment un abaissement d'autant plus considérable, qu'il sera réparti, de part et d'autre du milieu du pont, sur une moindre portion de la longueur du plancher. Le cas où ce poids serait placé tout entier au milieu du plancher mérite d'être distingué, parce qu'il conduit à l'expression d'une limite que l'abaissement de ce milieu ne peut dépasser; et ce sont sur-tout de semblables limites qu'il est utile de connaître pour l'établissement des constructions. Si l'on suppose $h' = 0$, l'équation (8) donne

$$Q' = \frac{ph^2 + \Pi h}{2f'}; \qquad (9)$$

L'expression (7) de la demi-longueur du fil devient

$$c = h + \frac{1}{2p}\left[\frac{1}{3\cdot 2}\,\frac{(2ph+\Pi)^3 - \Pi^3}{(2Q')^2} - \frac{1}{5\cdot 8}\,\frac{(2ph+\Pi)^5 - \Pi^5}{(2Q')^4} + \&c.\right],$$

ou, en remplaçant Q' par la valeur (9),

$$c = h + \frac{1}{2p}\left[\frac{1}{3\cdot 2}\,\frac{(2ph+\Pi)^3 - \Pi^3}{(2ph+2\Pi)^2}\left(\frac{2f'}{h}\right)^2 - \frac{1}{5\cdot 8}\,\frac{(2ph+\Pi)^5 - \Pi^5}{(2ph+2\Pi)^4}\left(\frac{2f'}{h}\right)^4 + \&c.\right],$$

ou enfin

$$c = h\left\{1 + \frac{1}{3\cdot 2}\,\frac{\left(1+\frac{\Pi}{2ph}\right)^3 - \left(\frac{\Pi}{2ph}\right)^3}{\left(1+\frac{2\Pi}{2ph}\right)^2}\left(\frac{2f'}{h}\right)^2 - \frac{1}{5\cdot 8}\,\frac{\left(1+\frac{\Pi}{2ph}\right)^5 - \left(\frac{\Pi}{2ph}\right)^5}{\left(1+\frac{2\Pi}{2ph}\right)^4}\left(\frac{2f'}{h}\right)^4 + \&c.\right\}$$

La quantité $\frac{\Pi}{2ph}$, représentant le rapport du poids placé au milieu du plancher au poids total du pont, sera généralement dans les applications une fraction fort petite, dont on pourra négliger le carré et les puissances supérieures. En observant qu'on a alors, à très-peu près,

$$\frac{\left(1+\frac{\Pi}{2ph}\right)^n - \left(\frac{\Pi}{2ph}\right)^n}{\left(1+\frac{2\Pi}{2ph}\right)^{n-1}} = 1 - (n-2)\,\frac{\Pi}{2ph},$$

on voit qu'on peut écrire, au lieu de la formule précédente,

$$c = h\left[1 + \frac{1}{3\cdot 2}\left(1-\frac{\Pi}{2ph}\right)\left(\frac{2f'}{h}\right)^2 - \frac{1}{5\cdot 8}\left(1-\frac{3\Pi}{2ph}\right)\left(\frac{2f'}{h}\right)^4 + \frac{1}{7\cdot 16}\left(1-\frac{5\Pi}{2ph}\right)\left(\frac{2f'}{h}\right)^6 - \&c.\right]. \quad (10)$$

122. Si maintenant on applique à cette dernière équation la méthode du retour des suites appliquée à l'équation (22), article 115, on aura

$z = \frac{c-h}{h}$, $t = \frac{2f'}{h}$; $\alpha = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{\Pi}{2ph}\right)$, $\beta = -\frac{1}{40}\left(1 - \frac{3\Pi}{2ph}\right)$, $\gamma = \frac{1}{112}\left(1 - \frac{5\Pi}{2ph}\right)$, &c.;

et par conséquent

$$\left(\frac{2f'}{h}\right)^2 = 6\left[\left(1+\frac{\Pi}{2ph}\right)\frac{c-h}{h} + \frac{9}{10}\left(\frac{c-h}{h}\right)^2 - \frac{54}{175}\left(1-\frac{\Pi}{2ph}\right)\left(\frac{c-h}{h}\right)^3 + \frac{207}{350}\left(1-\frac{2\Pi}{2ph}\right)\left(\frac{c-h}{h}\right)^4 - \&c.\right]. \quad (11)$$

Cette équation est, dans le nouvel état d'équilibre que nous considérons, l'analogue de l'équation (23) du paragraphe précédent. En comparant la valeur qui en résultera pour f' avec celle que cette équation (23) donne pour f, on connaîtra l'abaissement produit par le poids Π. Si l'on met la valeur ainsi trouvée pour f' dans la formule (9), et si l'on compare la valeur qui en résultera pour Q' avec celle de Q donnée par la formule (17), article 113, on connaîtra également l'augmentation que le poids Π produit dans la tension horizontale supportée par les chaînes.

123. En divisant l'équation précédente par l'équation (23), article 115, il vient

$$\frac{f'^2}{f^2} = \frac{1 + \frac{\Pi}{2ph} + \frac{9}{10}\left(\frac{c-h}{h}\right) - \frac{54}{175}\left(1 - \frac{\Pi}{2ph}\right)\left(\frac{c-h}{h}\right)^2 + \&c.}{1 + \frac{9}{10}\left(\frac{c-h}{h}\right) - \frac{54}{175}\left(\frac{c-h}{h}\right)^2 + \&c.}.$$

La valeur du second membre diffère très-peu de $1 + \frac{\Pi}{2ph}$ (*) : nous avons donc, à fort peu près,

$$f' = f\sqrt{1 + \frac{\Pi}{2ph}};$$

d'où l'on tire, en développant le radical, et négligeant toujours les puissances supérieures de la fraction $\frac{\Pi}{2ph}$,

$$f' - f = \frac{\Pi f}{4ph}. \quad (12)$$

On voit d'après cela que, toutes les fois qu'un poids placé au milieu de la longueur du plancher est petit par rapport au poids total du pont, la valeur absolue de l'abaissement produit par ce poids est représentée à très-peu près par la fonction $\frac{\Pi f}{4ph}$. Ainsi cet abaissement est, pour un poids donné, proportionnel à la flèche de la courbe décrite par les chaînes, et réciproque au poids total du pont : il est le même pour divers ponts dans lesquels les flèches seraient proportionnelles aux ouvertures.

(*) Ce second membre est de la forme $\frac{1+\alpha+\beta}{1+\beta}$, α et β étant des fractions. En prenant simplement $1+\alpha$ pour la valeur, on commet l'erreur, $1 + \alpha - \frac{1+\alpha+\beta}{1+\beta} = \frac{\alpha\beta}{1+\beta}$. Cette erreur peut être négligée, si les fractions α et β sont assez petites pour qu'on puisse en négliger le produit par rapport à l'unité.

En substituant l'expression précédente trouvée pour f' dans la valeur (9) de Q', il vient

$$Q' = \frac{ph^2 + \Pi h}{2f\left(1 + \frac{\Pi}{4ph}\right)}. \qquad (13)$$

Retranchant de cette quantité la valeur de Q donnée par l'équation (17), article 113, on a

$$Q' - Q = \frac{3\Pi h}{8f\left(1 + \frac{\Pi}{4ph}\right)}, \qquad (14)$$

pour l'augmentation qu'éprouvera la tension horizontale des chaînes, par suite de l'action du poids additionnel Π. Cette augmentation est donc à peu près proportionnelle au rapport de l'ouverture du pont à la flèche de la courbe des chaînes.

124. Les résultats précédens sont très-remarquables : ils apprennent qu'on n'a point à craindre, en augmentant l'ouverture des ponts dont le plancher est suspendu à des arcs flexibles, d'augmenter les changemens de figure résultant de l'action des charges mobiles et passagères. On peut même rendre ces changemens moins sensibles pour de plus grands ponts, en faisant croître la flèche de la courbe des chaînes dans un moindre rapport que la longueur du plancher. En effet, en diminuant la flèche, on s'approche d'une limite qui est le cas où les chaînes seraient tendues en ligne droite; à cette limite, la figure de ces chaînes est invariable, quelle que soit la distribution de la charge toutes les fois du moins que ces chaînes sont supposées inextensibles, comme nous le faisons ici. Mais on ne doit point oublier qu'en diminuant la flèche, on augmente proportionnellement la tension constante que le poids du plancher fait supporter aux chaînes, et les tensions variables causées par les charges accidentelles, tensions qui deviendraient infiniment grandes si la flèche était infiniment petite.

Nous pourrions encore considérer l'action simultanée de plusieurs poids, placés en divers points de la longueur du pont. Toutes les questions de ce genre se résoudront par des considérations semblables aux précédentes. Les résultats qui viennent d'être exposés paraissent suffire pour faire apprécier, dans le nouveau système de construction dont il s'agit, les modifications qui peuvent résulter d'une inégale répartition de la charge, et pour mettre à même de régler la figure et le poids des chaînes et du plancher, de manière que ces modifications ne puissent dépasser les limites qu'on aura fixées,

§. III.

De l'équilibre des supports sur lesquels reposent les chaînes.

125. Si la disposition naturelle des localités offre des points d'attache à une hauteur convenable, l'objet de ce paragraphe ne comporte pas de recherches spéciales. Dans le cas contraire, il est nécessaire d'élever sur les culées des supports sur lesquels les chaînes reposent, et au-delà desquels elles se dirigent obliquement vers le sol, où les extrémités sont fixées. Nous allons rechercher les conditions de l'équilibre de ces supports.

On a vu, dans la première partie de ce Mémoire, que les chaînes, dans plusieurs ponts suspendus établis en Écosse, étaient soutenues simplement par des poteaux en bois ou des colonnes en fer fondu. De semblables soutiens n'offrent qu'une très-faible résistance à un effort qui tendrait à les renverser dans le sens de la longueur du pont. La solidité de la construction exige évidemment qu'ils ne se trouvent exposés à aucune action transversale, à laquelle ils seraient incapables de résister efficacement, et qu'ils aient uniquement à supporter des pressions exercées dans le sens de la longueur.

Soit AB le soutien dont il s'agit (fig. 8, pl. XI), AM la chaîne de support du plancher, AN la chaîne de retenue qui se dirige de l'extrémité supérieure du support vers le sol. On connaîtra, au moyen des calculs indiqués dans les paragraphes précédens, l'angle α que la chaîne de support AM forme au point A avec l'horizon, et la composante horizontale Q de la tension que supporte cette chaîne. La valeur de cette tension au point A est $\frac{Q}{\cos.\alpha}$ article 111. Ainsi, dans l'état d'équilibre, le point A doit être considéré comme étant sollicité, suivant la direction AM, par une force $\frac{Q}{\cos.\alpha}$, dont la composante horizontale est Q, et dont la composante verticale est $\frac{Q\sin.\alpha}{\cos.\alpha}$, ou Q tang. α.

Supposons le poteau AB vertical, et soit ω l'angle que la chaîne de retenue AN forme avec l'horizon. Puisque le poteau est incapable de résister à une action horizontale, il est nécessaire que la composante horizontale de la tension qui s'exercera suivant AN, détruise la composante horizontale Q de la tension qui s'exerce suivant AM. Par conséquent, si l'on nomme R la tension supportée par la chaîne de retenue AN, on devra avoir $R\cos.\omega = Q$, ou

$$R = \frac{Q}{\cos\omega}, \qquad (1)$$

toutes les fois que le support AB pourra fléchir ou tourner librement sur l'extrémité

inférieure B. On voit que la tension R ne peut jamais être moindre que la tension horizontale Q : elle augmente à mesure que la direction AN se rapproche de la verticale, et tend à devenir infinie lorsque l'angle BAN devient très-petit.

La composante verticale de la tension de la chaîne de retenue est exprimée par $R \sin \omega$, ou Q tang. ω. Nous nommerons P la pression exercée dans la direction AB du poteau, pression qui est évidemment égale à la somme des composantes verticales des tensions des deux chaînes, et qui, par conséquent, a pour expression

$$P = Q\,(\text{tang. } \alpha + \text{tang. } \omega). \tag{2}$$

La pression P tend aussi à devenir infinie quand la direction AN approche de se confondre avec AB; et les poteaux doivent offrir une solidité suffisante pour résister à cette force.

126. La tension de la chaîne de retenue est exprimée par $\frac{Q}{\cos. \omega}$; et la longueur de cette chaîne, par $\frac{b}{\sin. \omega}$, b représentant la hauteur AB du poteau. La valeur en argent de la chaîne de retenue sera toujours à peu près proportionnelle au produit de la longueur par la tension; ainsi cette valeur sera un *minimum* en même temps que la fonction $\frac{1}{\sin. \omega \cos. \omega}$; c'est-à-dire, quand l'angle ω sera la moitié d'un angle droit. Il conviendrait donc, si l'on avait seulement égard à la dépense causée par la chaîne de retenue, de l'incliner de 45° sur l'horizon. Mais comme alors le poteau est plus chargé qu'il ne le serait si l'angle ω avait une valeur plus petite, cette circonstance peut engager à donner à cette chaîne plus d'inclinaison, et par conséquent plus de longueur.

127. Au lieu de placer le poteau dans la situation verticale AB (fig. 9, pl. XI), on peut l'incliner en arrière, suivant la direction $A'B$. En conservant les dénominations précédentes, désignant par θ l'angle de $A'B$ avec la verticale, et remarquant que les angles $BA'M$ et $BA'N$ sont respectivement égaux à $90° - (\alpha + \theta)$ et $90° - (\omega - \theta)$, on aura, pour exprimer que les composantes des tensions des chaînes perpendiculaires à $A'B$ se détruisent réciproquement, l'équation

$$\frac{Q}{\cos. \alpha} \cos. (\alpha + \theta) = R \cos. (\omega - \theta); \text{ d'où } R = \frac{Q}{\cos. \alpha} \cdot \frac{\cos. (\alpha + \theta)}{\cos. (\omega - \theta)}. \tag{3}$$

La somme des composantes des tensions dans le sens du poteau $A'B$, ou la pression longitudinale P qu'il supporte, a pour valeur

$$P = \frac{Q}{\cos. \alpha} [\sin. (\alpha + \theta) + \cos. (\alpha + \theta). \text{tang.} (\omega - \theta)]. \tag{4}$$

128. Dans le cas particulier où la direction $A'B$ partagerait en deux parties égales l'angle $NA'M$ formé par les chaînes, il est évident que la tension de la chaîne de

retenue devrait être égale à celle de la chaîne de support. On a effectivement alors $\alpha+\theta=\omega-\theta$, et la formule (3) donne

$$R=\frac{Q}{\cos.\alpha}. \tag{5}$$

L'expression (4) de l'effort exercé suivant la longueur du poteau devient ici

$$P=\frac{Q}{\cos.\alpha}.2\sin.\frac{\alpha+\omega}{2}, \tag{6}$$

valeur qu'il est facile de vérifier directement.

En essayant diverses dispositions, et se rendant compte, au moyen des formules précédentes, de la tension des chaînes de retenue, de l'effort exercé sur les poteaux, et de la longueur de ces pièces, on pourra déterminer la construction la plus solide et la plus économique. Il est essentiel de remarquer que les chaînes ne doivent pas simplement reposer sur les extrémités supérieures des poteaux, mais y doivent être fixées. On peut, dans les applications, regarder les valeurs précédentes de R comme des limites que la tension des chaînes de retenue ne pourra dépasser. La tension de ces chaînes atteindra effectivement ces limites, si les poteaux n'offrent aucune résistance au déversement : mais si ces poteaux ne peuvent céder sans effort à l'action des chaînes qui supportent le plancher, il en résultera une diminution dans la tension des chaînes de retenue.

129. Lorsque les supports des chaînes sont construits en maçonnerie, ou sont formés par une charpente en bois ou en fer ayant une large base, ces supports deviennent susceptibles de résister à une action transversale. On peut alors, au lieu d'attacher à l'extrémité supérieure des appuis, comme dans le cas précédent, les extrémités des chaînes de retenue et des chaînes qui soutiennent le plancher, faire reposer simplement les chaînes sur ces appuis; en sorte, que les chaînes de retenue deviennent le prolongement des chaînes de support, et ne forment avec elles qu'une seule et même chaîne, qui peut glisser dans un sens ou dans l'autre, sans que le soutien sur lequel elle porte prenne aucun mouvement. Nous allons examiner quels sont, dans ce dernier cas, le rapport des tensions des deux parties de la chaîne, et l'action supportée par ce soutien.

Soit $MACN$ (fig. 10, pl. XI) la chaîne de support prolongée pour former la chaîne de retenue, et reposant en AC sur le pilier $ABDC$. Désignons toujours par α et ω les angles que font avec l'horizon les parties AM et CN de la chaîne. Nous supposerons que la portion de chaîne AC portant sur le pilier forme une courbe tangente aux deux directions AM et CN. Cela posé, on peut distinguer deux cas : 1.° celui où la portion de chaîne AC serait supportée au moyen de rouleaux ou galets, en sorte qu'on pourrait la regarder comme libre de glisser sans effort sur le pilier; 2.° celui où

cette chaîne, reposant immédiatement sur le pilier, ne pourrait glisser sans produire un frottement, dont l'effet doit être pris en considération.

Dans le cas où la chaîne peut glisser sans frottement sur le pilier, la tension exercée suivant *AM* se transmet tout entière dans la portion *ACN*; en sorte que la tension, dans toute l'étendue de la chaîne, est exprimée par $\frac{Q}{\cos.\alpha}$. A l'égard de l'action supportée par le pilier, elle est la résultante des pressions exercées sur les différens points de la courbe supportant la portion de chaîne *AC*, résultante qui se confond évidemment avec celle des deux forces égales à $\frac{Q}{\cos.\alpha}$, dirigées suivant *AM* et suivant *CN*. La direction de cette résultante partage en deux parties égales l'angle de ces deux lignes, et forme avec la verticale un angle égal à $\frac{\omega-\alpha}{2}$. La valeur de la force dont il s'agit est donnée par l'expression (6) : en la décomposant horizontalement et verticalement, on voit que le pilier supporte un effort horizontal égal à

$$Q\left(1-\frac{\cos.\omega}{\cos.\alpha}\right), \tag{7}$$

et une charge verticale égale à

$$Q.\frac{\sin.\alpha+\sin.\omega}{\cos.\alpha}. \tag{8}$$

Ainsi, on ne peut mettre le pilier à l'abri de toute action horizontale, qu'en rendant l'angle ω égal à l'angle α. En diminuant l'angle ω, on diminue en même temps la pression supportée par le pilier.

130. Dans le cas où la chaîne ne peut glisser librement sur le pilier, le frottement qui résulte du glissement empêche que la tension qui a lieu dans la portion *AM* ne se transmette tout entière dans la portion *CN*: il arrive ici un effet analogue à celui qu'on observe lorsque, au moyen d'une corde enroulée sur un cylindre immobile, un petit effort fait équilibre à une tension très-considérable. Considérons un point m de la courbe *AC*; désignons par s l'arc Am, par ρ le rayon de courbure de cette courbe au point m, qui peut être considéré comme une fonction de s, et par r la tension qui a lieu dans la chaîne au point m. D'après les lois connues de la statique, la pression que la chaîne exercera sur la courbe au point m sera exprimée par $\frac{r}{\rho}$, la valeur de cette pression étant rapportée à l'unité de longueur de cette courbe; par conséquent, la pression sur l'élément ds sera $\frac{rds}{\rho}$, et le frottement qui en résultera, $\frac{\varphi.rds}{\rho}$, φ représentant le rapport du frottement à la pression. Or la tension r devant diminuer, dans l'intervalle ds, d'une quantité égale au frottement exercé sur cet élément, nous avons la relation

$$dr = -\frac{\varphi . r ds}{\rho}, \text{ ou } \frac{dr}{r} = -\frac{\varphi . ds}{\rho},$$

dans laquelle il ne reste plus qu'à substituer la valeur du rayon de courbure ρ en s, valeur qui dépend de la nature de la courbe AC. La disposition la plus simple et la plus convenable consiste à prendre pour cette courbe un arc de cercle : alors ρ est constant ; et en intégrant l'équation précédente, il vient

$$\log. r = const. - \frac{\varphi . s}{\rho}.$$

La constante se détermine en observant qu'au point A on a $s = 0$ et $r = \frac{Q}{\cos. \alpha}$; d'où résulte

$$\log. \frac{r \cos. \alpha}{Q} = -\frac{\varphi . s}{\rho}.$$

A l'extrémité opposée C de la courbe, la tension r est égale à R, en représentant toujours par cette lettre la tension de la chaîne de retenue CN. Par conséquent

$$\log. \frac{R \cos. \alpha}{Q} = -\frac{\varphi . S}{\rho},$$

S étant la longueur totale de la courbe. On déduit de cette équation

$$R = \frac{Q}{\cos. \alpha} . e^{-\frac{\varphi . S}{\rho}}, \tag{9}$$

e étant la base des logarithmes hyperboliques $= 2,718282$; ou

$$R = \frac{Q}{\cos. \alpha}\left(1 - \frac{\varphi S}{\rho} + \frac{1}{1.2}\left(\frac{\varphi S}{\rho}\right)^2 - \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{\varphi S}{\rho}\right)^3 + \&c.\right).$$

On peut remarquer que l'angle formé par deux perpendiculaires aux directions AM et CN est égal à $\alpha + \omega$; et que, la courbe AC étant supposée formée par un arc de cercle tangent à ces deux directions, le rapport $\frac{S}{\rho}$ a pour valeur $\pi \frac{\alpha + \omega}{180°}$. Cette valeur est indépendante de la longueur donnée à l'arc de cercle. On voit d'ailleurs que l'effet du frottement est de diminuer progressivement la tension dans la chaîne, depuis le point A jusqu'au point C, dans le rapport de 1 à $e^{-\frac{\varphi . S}{\rho}}$, ou $e^{-\varphi . \pi \frac{\alpha + \omega}{180°}}$.

L'effort supporté par le pilier, représenté ci-dessus par P, est toujours la résultante des pressions exercées par la chaîne sur tous les points de la courbe AC, résultante qui ne diffère point, comme on l'a observé précédemment, de celle des deux tensions $\frac{Q}{\cos. \alpha}$ et R, dirigées suivant AM et CN. La valeur de cet effort sera donc

$$P = \sqrt{\frac{Q^2}{\cos.^2 \alpha} - \frac{2QR\cos.(\alpha+\omega)}{\cos.\alpha} + R^2}, \qquad (10)$$

expression où l'on doit substituer pour R la valeur donnée par l'équation (9), et qui coïncide avec la formule (6) quand on suppose $R = \frac{Q}{\cos.\alpha}$. Nommant θ l'angle de la direction de l'effort P avec la verticale, on a

$$\text{tang.}\,\theta = \frac{Q - R\cos.\omega}{Q\,\text{tang.}\,\alpha + R\sin.\omega}. \qquad (11)$$

L'effort supporté horizontalement par le pilier est

$$Q - R\cos.\omega; \qquad (12)$$

et la charge verticale,

$$Q\,\text{tang.}\,\alpha + R\sin.\omega. \qquad (13)$$

Si l'on compare ces deux dernières expressions aux formules (7) et (8), en n'oubliant point que R est ici $< \frac{Q}{\cos.\alpha}$, on reconnaît que, par l'effet du frottement de la chaîne sur la courbe AC, l'effort horizontal supporté par le pilier est augmenté, toutes choses égales d'ailleurs ; et que la charge verticale de ce même pilier est diminuée.

Il sera toujours important de diminuer, autant qu'on le pourra, les efforts horizontaux auxquels les supports des chaînes se trouveront exposés. Mais on doit remarquer toutefois que l'action des chaînes ne tendra point à renverser le soutien $ABDC$, si la direction de la résultante P des deux tensions passe entre les extrémités B et D de la base BD. Ce soutien sera seulement alors comprimé; et il suffit que les matériaux dont il est formé soient capables de résister à la force de compression, dont les expressions précédentes de P donneront dans chaque cas la valeur. Si la direction de la résulante P tombait au-delà du point B, l'action des chaînes tendrait à renverser le support, en le faisant tourner sur l'arête B. Nous examinerons plus bas le nouvel équilibre qui s'établit à l'instant où le renversement est prêt à commencer.

131. L'équation (9) montre que la tension R des chaînes de retenue est d'autant moindre par rapport à la tension $\frac{Q}{\cos.\alpha}$ des chaînes de support, que le rapport φ du frottement à la pression est plus grand. Ainsi on diminue l'effet des chaînes de retenue, et on augmente l'action qui tend à renverser le pilier, quand on rend le glissement de la chaîne plus difficile. Ce glissement deviendrait tout-à-fait impossible, si, au lieu de porter sur une courbe, la chaîne reposait sur un angle saillant, parce que les chaînes employées dans les constructions dont il s'agit sont bien éloignées d'offrir le degré de flexibilité que l'on attribue aux fils dans les recherches de statique, où l'on regarde

ces fils comme pouvant se plier sur des cylindres d'un diamètre infiniment petit. Pour appliquer à ce cas les résultats précédens, il faut supposer φ infini dans l'équation (9), ce qui donne $R=0$. L'effet d'une semblable disposition serait donc (puisque nous supposons ici le pilier parfaitement fixe) d'empêcher la tension de la chaîne de support AM de se transmettre dans la portion de chaîne CN; cette dernière chaîne, n'étant point tendue, pourrait être supprimée, et il n'y aurait plus que la résistance du pilier pour faire équilibre à l'action des chaînes de support. Dans ce cas, le pilier supporte, à l'extrémité supérieure, une action horizontale égale à

$$Q, \tag{14}$$

et une charge verticale égale à

$$Q \text{ tang. } \alpha. \tag{15}$$

132. On pourrait employer, pour faire reposer la chaîne sur le pilier, une disposition qui offre quelques avantages. Cette disposition, indiquée par la figure 11, planche XI, consiste à fixer les extrémités des chaînes de support et de retenue à un appareil AC, soutenu sur un système de rouleaux, et libre de glisser horizontalement sur le sommet du pilier. L'appareil AC pourrait encore, comme le représente la figure 12, offrir une sorte de secteur, terminé en E par une courbe convexe reposant sur un plan, ou par une courbe concave reposant sur un axe cylindrique fixé dans la maçonnerie du pilier. L'appareil ACE pourrait même occuper toute la hauteur du support, en sorte que l'extrémité E porterait sur la base BD. On peut aussi, comme l'a fait M. Brunel dans l'un des ponts construits pour l'île de Bourbon (article 83), suspendre le point commun d'attache des chaînes AM et CN à l'extrémité supérieure du support. L'effet des dispositions de ce genre étant de laisser ce point d'attache libre de céder à l'action exercée dans le sens de la longueur des chaînes, l'équilibre du système exige l'égalité des composantes horizontales des deux tensions dirigées suivant AM et CN. Par conséquent, en représentant toujours par α et ω les angles que ces directions forment avec l'horizon, et considérant comme tout-à-fait nulle la résistance provenant des frottemens du second ordre qui ont lieu dans les appareils dont il s'agit, la valeur de la tension qui s'établira dans la chaîne de retenue CN sera donnée par la formule (1), article 125. Le pilier ne supportera aucune action horizontale, et la charge verticale sera donnée par la formule (2). Dans la réalité, la résistance provenant du frottement ne sera pas tout-à-fait nulle, quoique fort petite; la tension de la chaîne AC sera un peu moindre que ne la donnerait la formule (1), et le pilier supportera une action transversale égale à la différence des composantes horizontales des tensions des deux chaînes.

Si les dispositions précédentes offrent l'avantage de soustraire presque entièrement les supports des chaînes à toute action horizontale, cet avantage paraît compensé par quelques inconvéniens. Indépendamment de la difficulté de rendre solides des pièces mobiles soumises à de très-fortes pressions, on peut craindre, dans certains cas, à raison même de la mobilité de ces pièces, que la maçonnerie du pilier ne se trouve beaucoup plus fatiguée par l'effet des secousses imprimées aux chaînes lors du passage des voitures, qu'elle ne le serait en adoptant les autres dispositions examinées dans les articles précédens.

133. Après avoir passé en revue les principales dispositions qui peuvent être employées pour faire reposer les chaînes sur les appuis, et indiqué les efforts auxquels ces appuis supposés fixes se trouveront exposés dans chaque cas, il reste à examiner le nouvel état d'équilibre qui s'établirait si les appuis étaient prêts à céder à ces efforts en se renversant, et d'après lequel la résistance au renversement doit être calculée.

Nous avons remarqué précédemment qu'un support n'était point sollicité au renversement, lorsque la direction de la résultante P des tensions qui ont lieu dans les deux portions de chaîne AM et CN (fig. 10, pl. XI) passait dans l'intérieur de la base BD. Il faudrait donc que cette résultante fût dirigée suivant une ligne telle que EF, pour qu'on se trouvât dans le cas de vérifier la stabilité du support $ABDC$ sous le point de vue dont il s'agit. Nous supposerons, comme dans l'article 130, que la chaîne se plie en traversant le pilier suivant un arc de cercle AC, tangent en A et C aux directions AM et CN; et que cette chaîne ne peut glisser sur la courbe d'appui sans produire un frottement. Cela posé, considérons le support comme prêt à céder à l'action de la résultante P dirigée suivant EF, et par conséquent à se renverser en tournant sur l'arête B. Ce mouvement ne pouvant s'opérer sans que la portion de chaîne AC et la courbe d'appui ne glissent l'une sur l'autre, le frottement qui résultera de ce glissement s'oppose au renversement du pilier : il concourt avec le poids de ce pilier pour le maintenir dans la même situation. Pour se rendre compte de l'action produite par ce frottement, on remarquera que, lorsque l'on considère la chaîne comme pouvant glisser dans le sens CA, l'effet du frottement est de diminuer la tension de cette chaîne, du point A au point C, dans le rapport de 1 à $e^{-\frac{\varphi . S}{\rho}}$. Mais dans le cas que nous considérons présentement, la chaîne doit être regardée comme immobile, et c'est la courbe d'appui qui doit glisser dans le sens CA, ce qui revient à supposer la courbe d'appui fixe, et la chaîne prête à glisser dans le sens AC. Par conséquent le frottement agira en sens inverse de ce qui avait lieu dans le cas de l'article 130, en sorte que la tension de la chaîne diminuera maintenant du point C au point A dans le rapport indiqué ci-dessus; ou, si l'on veut, augmentera du point A au point C

dans le rapport de 1 à $e^{\frac{\varphi.S}{\rho}}$. Il suit de là, en conservant les dénominations précédentes, que, la tension suivant AM étant toujours $\frac{Q}{\cos\alpha}$, il s'établirait, avant que le pilier ne pût commencer à se mouvoir, une tension

$$R = \frac{Q}{\cos.\alpha} \cdot e^{\frac{\varphi.S}{\rho}} \qquad (16)$$

dans la portion de chaîne CN.

Cette portion de chaîne étant supposée assez forte pour ne point rompre sous cette nouvelle tension, on voit que la stabilité du pilier doit être calculée en le supposant soumis au point A à l'action de la force $\frac{Q}{\cos.\alpha}$, dirigée suivant AM; et au point C, à l'action de la force $R = \frac{Q}{\cos.\alpha} e^{\frac{\varphi.S}{\rho}}$, dirigée suivant CN. Si l'on détermine maintenant, au moyen des formules (10) et (11), dans lesquelles on mettra pour R la valeur (16), la grandeur et la direction de la résultante P, et que cette direction passe entre les points B et D, la stabilité du pilier sera assurée, et il restera seulement à vérifier si ce pilier ne peut être écrasé sous l'effort P qu'il aura à supporter. Mais si la résultante se trouvait encore dirigée suivant une ligne EF passant au-delà du point B, il faudrait alors vérifier si le moment de stabilité du pilier, par rapport à l'arête B, est plus grand que le moment de la force P pour faire tourner le pilier sur cette arête.

134. Si la chaîne, comme on l'a supposé article 132, reposait sur la courbe d'appui au moyen d'un système de galets ou de rouleaux, en sorte que le frottement dût être considéré comme insensible, la tension demeurerait nécessairement constante dans toute l'étendue $MACN$ de cette chaîne, lors même que le pilier viendrait à être renversé. A l'instant où ce renversement serait prêt à s'opérer, le pilier se trouverait encore dans l'état d'équilibre indiqué article 129 : ainsi le frottement des chaînes sur les courbes d'appui tend à consolider les supports.

135. On doit remarquer qu'en ayant seulement égard aux conditions de l'équilibre du système, et faisant abstraction des variations des dimensions des pièces résultant des changemens de la température, la chaîne de retenue CN ne doit pas être regardée comme étant nécessairement exposée à supporter la tension exprimée par la formule (16). Il ne peut jamais s'établir dans cette chaîne une tension qui surpasse celle $\frac{Q}{\cos.\omega}$ donnée par la formule (1); car, à l'instant où une semblable tension existerait, les actions horizontales exercées sur le pilier se détruisant mutuellement, il n'y aurait plus aucune ten-

dance au renversement. Il suit de cette remarque, que, si la formule (16) donne pour R une valeur au moins égale à $\frac{Q}{\cos.\omega}$, on est assuré, sans autre calcul, que le pilier ne peut être renversé. On voit que l'effet du frottement de la chaîne sur la courbe d'appui est, en cas de tendance au renversement, de faire croître la tension dans la chaîne de retenue, jusqu'à ce que cette tension ait acquis la valeur suffisante pour que la chaîne maintienne le pilier. La plus grande valeur que cette tension puisse alors acquérir, est déterminée par la condition que le moment de la composante horizontale par rapport au point fixe B, réuni au moment de stabilité du pilier, soit égal au moment de la force Q. On doit regarder cette valeur et celle donnée par la formule (16) comme deux limites, dont la moindre ne peut être surpassée par la tension de la chaîne de retenue.

De l'effet de la flexion des chaînes de retenue.

136. On a supposé, dans tout ce qui précède, les chaînes de retenue tendues en ligne droite. Dans la réalité, le poids de ces chaînes les oblige à se courber; mais, comme ce poids sera toujours fort petit par rapport à la tension qu'elles auront à supporter, la courbure sera presque insensible, et on peut en faire abstraction, sans erreur, dans tous les calculs indiqués dans ce paragraphe. Si l'on veut toutefois s'en rendre compte, on le pourra de la manière suivante.

Considérons d'abord le cas de l'article 125, dans lequel les supports des chaînes sont formés par des poteaux qui peuvent se déverser facilement d'un côté ou de l'autre. On a vu que, dans ce cas, l'équilibre des supports exigeait l'égalité des tensions horizontales des deux chaînes AM, AN (fig. 13, pl. XI), tensions que nous représentons par Q. La valeur de Q est donc alors déterminée dans la chaîne de retenue AN.

Soit maintenant σ le poids de l'unité de longueur de cette chaîne; désignons par ω l'angle de la ligne droite AN avec l'horizon, par a la distance AP, et par b la hauteur PN. A raison du peu d'amplitude de la courbe AmN, nous pouvons évidemment, pour plus de simplicité, la regarder comme chargée par des poids uniformément distribués sur l'horizontale AP, et dont la valeur serait, pour l'unité de longueur de cette ligne, $\frac{\sigma}{\cos.\omega}$. D'après cela, la figure de la courbe AmN sera assujettie aux résultats des articles 109 et suivans. L'équation (3), article 110, en y mettant pour tang. α la valeur (5) de l'article 111, en y supposant $x = \frac{1}{2}a$, et écrivant $\frac{\sigma}{\cos.\omega}$ au lieu de p, donnera donc, pour la valeur de l'ordonnée pm correspondante au point milieu de AP,

$$pm = \frac{b}{2} + \frac{\sigma a^2}{8\,Q\cos.\omega};$$

en sorte que la flèche qm de la courbe, mesurée verticalement, a pour valeur

$$qm = \frac{\epsilon a^2}{8\,Q\cos.\omega}.$$

La valeur rm de la même flèche, mesurée perpendiculairement à la corde AN, sera par conséquent

$$rm = \frac{\epsilon a^2}{8\,Q}. \qquad (17)$$

137. Quant à la longueur AmN de la chaîne, elle serait donnée exactement par la formule (13), article 112 : mais, à raison de l'extrême petitesse de la flèche, nous pouvons évidemment la calculer au moyen de la formule (22), article 114, qui donnera la moitié de la longueur cherchée, en mettant $\frac{a}{2\cos.\omega}$ au lieu de h, la valeur précédente de rm au lieu de f, et nous bornant au premier terme de la série. La longueur totale AmN se trouve ainsi exprimée par

$$\frac{a}{\cos.\omega}\left[1 + \frac{1}{6}\left(\frac{\epsilon a \cos.\omega}{2Q}\right)^2\right];$$

et nous avons par conséquent, pour la différence entre la longueur AmN de la chaîne et celle AN de la ligne droite qui en joint les extrémités,

$$\frac{\epsilon^2 a^3 \cos.\omega}{24\,Q^2}, \qquad (18)$$

quantité qui sera toujours extrêmement petite, à raison de la petitesse du rapport $\frac{\epsilon}{Q}$.

138. Lorsque le poids supporté par le plancher du pont variera, il en résultera une variation correspondante dans la tension horizontale Q des chaînes de retenue et des chaînes de support. Supposons que la valeur de la tension horizontale Q qui entre dans la formule précédente, ait été calculée en supposant une charge p sur chaque unité de longueur du plancher. Si ce plancher reçoit sur chaque unité de longueur une charge additionnelle ϖ, la tension Q deviendra $Q\frac{p+\varpi}{p}$. Or, si l'on avait supposé d'abord à Q cette valeur, l'excès de la longueur de la courbe AmN sur celle de la corde AN aurait été

$$\frac{\epsilon^2 a^3 \cos.\omega}{24.Q^2}\cdot\frac{p^2}{(p+\varpi)^2}.$$

Il suit de là que la charge additionnelle ϖ produit le même effet que si la chaîne de retenue s'allongeait de la quantité

$$\frac{\epsilon^2 a^3 \cos.\omega}{24.Q^2}\left(1 - \frac{p^2}{(p+\varpi)^2}\right), \qquad (19)$$

ce qui permettrait à l'extrémité supérieure A des poteaux servant d'appui de se déplacer horizontalement d'une quantité dont on aura à très-peu près la valeur en divisant l'expression précédente par cos. ω, et qui par conséquent ne diffère pas sensiblement de

$$\frac{\varepsilon^2 a^3}{24 . Q^2}\left(1-\frac{p^2}{(p+\varpi)^2}\right). \tag{20}$$

Cette formule donnera le moyen d'apprécier, abstraction faite de l'extensibilité des chaînes, le très-petit balancement horizontal que le passage des fardeaux sur le plancher du pont occasionne nécessairement à l'extrémité supérieure des poteaux. On peut remarquer que l'étendue de ce déplacement est indépendante de la hauteur AB du support, mais augmente rapidement, toutes choses égales d'ailleurs, avec la distance AP ou BN, représentée par A. Ainsi le poteau tend à demeurer d'autant plus fixe, que la chaîne de retenue approche davantage d'être verticale.

139. Considérons à présent le cas des articles 129 et suivans, c'est-à-dire, supposons la chaîne supportée par un pilier fixe, sur lequel elle peut glisser. Dans ce cas, ce n'est plus la composante horizontale Q de la tension de la chaîne de retenue qui se trouve déterminée par la grandeur de la charge p placée sur l'unité de longueur du plancher du pont, mais la tension même que cette chaîne doit supporter à l'extrémité supérieure, tension que nous avons désignée par R. Si nous nommons β l'angle que la courbe AmN forme au point A avec l'horizon, l'équation (5), article 111, en observant que $b = a$ tang. ω, et écrivant $\frac{\varepsilon}{\cos.\omega}$ au lieu de p, donnera

$$\text{tang. } \beta = \text{tang. } \omega + \frac{\varepsilon a}{2\, Q \cos.\omega}.$$

D'un autre côté, nous avons, par les formules (10) du même article,

$$R = Q\sqrt{1+\text{tang.}^2 \beta}.$$

Éliminant tang. β entre ces deux équations, il viendra

$$Q = -\frac{\varepsilon a \sin.\omega}{2} + \sqrt{R^2 \cos^2\omega - \frac{\varepsilon^2 a^2 \cos.^2\omega}{4}},$$

expression à la place de laquelle on peut prendre, sans erreur sensible,

$$Q = R \cos.\omega - \frac{\varepsilon a \sin.\omega}{2}, \tag{21}$$

et que l'on pourrait même réduire à $Q = R$ cos. ω. Elle représente la tension horizontale qui aura lieu dans la chaîne de retenue, dont il faudra substituer la valeur dans la formule (18) pour avoir l'excès de la longueur de cette chaîne sur celle de la

ligne droite AN, et dans la formule (19) pour avoir la quantité dont la distance AN aura augmenté par suite du redressement de la chaîne provenant de l'augmentation de la tension. Il sera nécessaire, en raison de cette augmentation de la distance AN, ou que la chaîne glisse sur la courbe d'appui de la quantité exprimée par la formule (19), ou que, le pilier fléchissant un peu, l'extrémité supérieure se déplace horizontalement de la quantité exprimée par la formule (20).

Les calculs précédens supposent les chaînes de retenue inextensibles. Dans la réalité, elles s'allongent lorsque la tension augmente, et le déplacement de l'extrémité supérieure des piliers est plus grand que celui que l'on calculerait par la formule (20). On trouvera dans le paragraphe VII les moyens d'apprécier ce dernier effet.

§. IV.

De l'équilibre des supports sur lesquels reposent les chaînes, quand il y a plusieurs arches à la suite les unes des autres.

140. Lorsqu'un pont dont le plancher est suspendu à des chaînes offre plusieurs arches placées à la suite les unes des autres, on peut distinguer, quant à la manière dont les supports sont disposés, trois cas principaux : celui où les chaînes sont soutenues par des piliers fixes, sur lesquels elles ne peuvent glisser ; celui où les chaînes sont soutenues par des piliers fixes, auxquels elles ne sont point attachées, et sur lesquels elles peuvent glisser en exerçant un frottement ; enfin, le cas où les chaînes, étant supportées par un pilier fixe, peuvent glisser sans frottement sensible sur les courbes d'appui, ou bien sont attachées à l'extrémité supérieure de poteaux qui peuvent facilement fléchir ou se déverser. Quelle que soit d'ailleurs la manière dont les chaînes sont soutenues, si les arches placées à la suite les unes des autres sont égales, les supports ne sont soumis, par suite de l'action du poids du pont, à aucun effort horizontal, et chacun d'eux soutient seulement une charge verticale égale au poids d'une arche. Mais il n'en est plus de même si l'on place sur une des arches seulement une charge additionnelle; et l'objet de ce paragraphe est d'examiner les modifications résultant de l'action de cette charge.

Considérons d'abord deux arches égales placées à la suite l'une de l'autre (fig. 14, pl. XI). Si l'on place sur le plancher BD de la première arche seulement une charge additionnelle, la tension des chaînes prendra dans cette arche une plus grande valeur; en sorte que, la chaîne en C étant sollicitée plus fortement dans la direction CM que dans la direction CN, cette chaîne tendra à glisser sur l'appui dans le sens

NCM. Si le pilier est fixe, et si la chaîne est fixée et attachée à ce pilier tout mouvement est impossible ; la figure des deux arches n'éprouve aucun changement, et le pilier supporte à l'extrémité supérieure un effort transversal égal à la différence des tensions horizontales des deux chaînes. Ce pilier doit offrir une solidité et une stabilité suffisantes pour résister à cet effort.

141. Mais si la chaîne peut glisser sur le pilier, et si la résistance provenant du frottement est moindre que la différence des tensions qui ont lieu suivant *CM* et *CN*, le glissement aura lieu ; et il continuera jusqu'à ce que la tension la plus petite, augmentée de l'effet du frottement, soit devenue égale à la tension la plus grande. Par l'effet de ce glissement, la chaîne *AMC*, qui est la plus chargée, acquérant plus de longueur et plus de courbure, la tension de cette chaîne diminue, tandis que la tension de la chaîne *CNE* augmente, par suite de la diminution de la longueur et de la courbure de cette chaîne. L'équilibre ne tarde donc pas à se rétablir : alors le support *CD* supporte toujours un effort transversal égal à la différence des tensions horizontales des deux chaînes.

Pour soumettre ces effets au calcul, on désignera, comme ci-dessus, par $2h$ la longueur de la corde de la courbe des chaînes, par f la flèche de cette courbe, par α l'angle que la courbe forme au point extrême avec l'horizon, par p le poids porté par l'unité de longueur du plancher de chaque arche, et par Q la tension horizontale des chaînes. Admettant que le plancher *BD* de la première arche a reçu une charge additionnelle, et que cette charge est répartie uniformément sur la longueur de ce plancher, on désignera par p' la valeur plus grande que p du poids correspondant à l'unité de longueur. On supposera d'ailleurs les changemens de figure des deux arches fort petits ; et cette supposition, qui rend les calculs plus simples, n'empêchera pas que les résultats ne soient applicables aux constructions, puisque les constructions ne peuvent évidemment être établies de manière à laisser une étendue considérable aux changemens de figure dont il s'agit.

Cela posé, nommons δ le petit accroissement qu'éprouvera la flèche f de la courbe *AMC*, par suite du glissement de la chaîne dans le sens *NCM*, la quantité δ étant supposée assez petite pour qu'on puisse en négliger le carré et les puissances supérieures. Il résultera de cette dernière supposition, que, la flèche de la courbe *AMC* devenant $f+\delta$, la flèche de la courbe *CNE* doit devenir en même temps $f-\delta$. En effet, considérons la longueur c de la courbe *AMC* comme une fonction de la flèche f de cette courbe : f devenant $f+\delta$, c deviendra $c+\frac{dc}{df}\delta$, puisqu'on néglige les puissances supérieures de δ. Et de même, si, dans la seconde arche, f devient $f-\delta'$, la longueur de la courbe *CNE* deviendra $c-\frac{dc}{df}\delta'$. Or l'augmentation de la longueur

de l'une des courbes est précisément égale à la diminution de la longueur de l'autre ; ce qui ne peut arriver qu'autant que l'on aura $\delta' = \delta$.

En regardant également les quantités Q et tang. α comme fonctions de la flèche f, on aura $Q \pm \frac{dQ}{df}\delta$, tang. $\alpha \pm \frac{d(\text{tang.}\,\alpha)}{df}\delta$, pour les valeurs que prennent ces quantités lorsque f augmente ou diminue de δ. Si l'on différencie les équations (16) et (17), article 113, en regardant h comme constante, on trouve $\frac{dQ}{df} = -\frac{ph^2}{2f^2}$, $\frac{d(\text{tang.}\,\alpha)}{df} = \frac{2}{h}$. Par conséquent, lorsque f augmente ou diminue de δ, les quantités Q et tang. α deviennent respectivement

$$\frac{ph^2(f \mp \delta)}{2f^2}, \text{ et } \frac{2(f \pm \delta)}{h}.$$

142. Il résulte de là, que, par l'effet de la charge additionnelle placée sur la première arche, et du changement de figure que cette surcharge a produit, la tension de la chaîne à l'extrémité supérieure dans le sens CM, tension généralement représentée par $Q\sqrt{1 + \text{tang.}^2\,\alpha}$, a pris la valeur

$$\frac{p'h^2(f-\delta)}{2f^2}\sqrt{1 + \frac{4(f+\delta)^2}{h^2}};$$

et que, dans la seconde arche, la tension de la chaîne à l'extrémité supérieure dans le sens CN a pris la valeur

$$\frac{ph^2(f+\delta)}{2f^2}\sqrt{1 + \frac{4(f-\delta)^2}{h^2}}.$$

Si la chaîne pouvait glisser sans frottement sur le pilier, l'équilibre ne subsisterait qu'autant que ces deux tensions seraient égales; mais l'effet du frottement est d'empêcher que la tension exercée suivant CM ne se transmette tout entière d'un côté du pilier à l'autre. En supposant toujours que la chaîne se plie sur le pilier suivant un arc de cercle dont la longueur est S et le rayon ρ, on verra, comme dans l'article 130, que, par l'effet du frottement, la tension suivant CM est réduite, à l'autre extrémité de l'arc de cercle, dans le rapport de 1 à $e^{-\frac{\varphi . S}{\rho}}$, φ représentant le rapport du frottement à la pression. Par conséquent, la condition de l'équilibre du système est exprimée par l'équation

$$e^{-\frac{\varphi . S}{\rho}} . \frac{p'h^2(f-\delta)}{2f^2}\sqrt{1 + \frac{4(f+\delta)^2}{h^2}} = \frac{ph^2(f+\delta)}{2f^2}\sqrt{1 + \frac{4(f-\delta)^2}{h^2}}. \quad (1)$$

En résolvant cette équation par rapport à δ, et négligeant toujours le carré de cette quantité, on trouve

$$\delta = \frac{f}{2}\left(1 + \frac{4f^2}{h^2}\right)\frac{p'^2 e^{-\frac{2\varphi S}{\rho}} - p^2}{p'^2 e^{-\frac{2\varphi S}{\rho}} + p^2};$$

ou bien, en remarquant que $\frac{2f}{h} = \text{tang.}\,\alpha$,

$$\delta = \frac{f}{2\cos^2\alpha} \cdot \frac{p'^2 e^{-\frac{2\varphi S}{\rho}} - p^2}{p'^2 e^{-\frac{2\varphi S}{\rho}} + p^2}, \qquad (2)$$

pour l'expression de l'abaissement du point milieu de la première arche. Cet abaisse-serait donc nul, si l'on avait $p' e^{-\frac{\varphi S}{\rho}} = p$. Si la première de ces quantités était plus petite que la seconde, ce qui peut arriver si le rapport φ est suffisamment grand, la formule (2) donnerait pour δ une valeur négative : mais une semblable valeur ne peut être admise, et il faudrait seulement en conclure que la résistance provenant du frottement est plus que suffisante pour empêcher la chaîne de glisser dans le sens *NCM*, et pour maintenir la figure actuelle des deux arches.

143. Si la résistance provenant du frottement était nulle, comme cela aurait lieu si la chaîne reposait en *C* sur des rouleaux, ou si elle était soutenue sur des poteaux qui pussent se déverser facilement d'un côté ou de l'autre, on aurait $\varphi = 0$. La formule précédente deviendrait

$$\delta = \frac{f}{2\cos.^2\alpha} \cdot \frac{p'^2 - p^2}{p'^2 + p^2}. \qquad (3)$$

Ce résultat apprend qu'il suffirait alors d'une légère surcharge dans la première arche pour produire un changement de figure considérable; car, en supposant $p' = \frac{3p}{2}$, le second facteur de la valeur de δ devient $\frac{5}{13}$. Dans les constructions dont il s'agit, la valeur des charges qui peuvent se trouver accidentellement sur une arche, égale ou même surpasse quelquefois le poids de la construction elle-même. Ainsi, quoique les résultats précédens ne puissent s'appliquer rigoureusement qu'au cas où la variation δ est fort petite, on peut néanmoins en conclure qu'il serait impossible, en général, sans s'exposer à des changemens de figure beaucoup trop sensibles, de laisser les chaînes libres de glisser sur le support intermédiaire *CD*; ou bien de former ce support par de simples poteaux, n'offrant presque aucune résistance à une action transversale.

144. Lorsque l'état d'équilibre exprimé par l'équation (1) est formé, le support *CD*

N

soutient à l'extrémité supérieure un effort transversal égal à la différence des composantes horizontales des tensions exercées suivant CM et CN. La valeur de cet effort est donc

$$\frac{p'h^2(f-\delta)}{2f^2} - \frac{ph^2(f+\delta)}{2f^2}, \text{ ou } \frac{(p'-p)h^2}{2f}\left(1-\frac{2\delta}{f}\right), \qquad (4)$$

quantité un peu moindre que la tension horizontale qui serait due à la surcharge $p'-p$. On remplacera δ par la valeur donnée par les formules (2) ou (3). La sûreté de la construction exige que le pilier offre la solidité et la stabilité nécessaire pour résister à cet effort; car on ne pourrait considérer ici, comme on l'a fait article 133, le frottement qui s'exerce entre la chaîne et la courbe d'appui sur le pilier, comme contribuant à la stabilité de ce pilier. En effet, la considération employée article 133 est fondée sur ce que la tension peut augmenter dans la chaîne de retenue, sans que cette chaîne, dont l'extrémité est fixe, se déplace. Le pilier, par l'effet du frottement, ne pouvant commencer à tourner sans avoir fait augmenter considérablement la tension dans cette chaîne, se trouve maintenu par suite de cet accroissement de tension. Mais ici le pilier peut commencer à tourner sans que la tension ait augmenté dans la chaîne CN; car la tension de cette chaîne ne peut jamais surpasser celle qui est produite par l'action du poids de la construction dont elle est chargée. La tension de la chaîne CN n'augmenterait qu'après que la flèche de cette chaîne aurait diminué, c'est-à-dire après que le pilier aurait un peu cédé : elle ne peut donc opposer aucun obstacle à ce mouvement. Il faut observer seulement que, si le pilier est prêt à céder, en sorte que la chaîne, que nous avons considérée ci-dessus comme prête à glisser dans le sens NCM sur la courbe d'appui, soit prête au contraire à glisser dans le sens MCN, on doit alors considérer la tension de cette chaîne comme diminuant, par l'effet du frottement, de la seconde arche à la première. On aura donc, au lieu de l'équation d'équilibre (1),

$$\frac{p'h^2(f-\delta)}{2f^2}\sqrt{1+\frac{4(f+\delta)^2}{h^2}} = e^{-\frac{\varphi S}{\rho}} \cdot \frac{ph^2(f+\delta)}{2f^2}\sqrt{1+\frac{4(f-\delta)^2}{h^2}}; \qquad (5)$$

d'où l'on déduira pour l'expression de l'abaissement δ, au lieu de la formule (2),

$$\delta = \frac{f}{2\cos.^2\alpha} \cdot \frac{p'^2 - p^2 \cdot e^{-\frac{2\varphi S}{\rho}}}{p'^2 + p^2 \cdot e^{-\frac{2\varphi S}{\rho}}}. \qquad (6)$$

Cette valeur de δ sera un peu plus grande que celle donnée par la formule (2), et, substituée dans la formule (4), donnera une valeur un peu plus petite pour l'expression de l'effort transversal soutenu par le pilier.

En adoptant donc cette dernière valeur de δ, la stabilité du pilier devra être vérifiée en le supposant soumis à l'extrémité supérieure à l'action d'une force dont la composante horizontale est donnée par la formule (4), dont la composante verticale (en négligeant le carré de δ) se trouve être égale à

$$(p' + p)\,h, \tag{7}$$

et dont l'inclinaison sur la verticale, que nous représentons par θ, est déterminée par l'équation

$$\text{tang.}\,\theta = \frac{h}{2f}\cdot\frac{p'+p}{p'-p}\left(1 - \frac{2\delta}{f}\right). \tag{8}$$

145. Quoique les résultats précédens puissent paraître suffisans pour fixer les idées sur le sujet de ce paragraphe, nous considérerons encore le cas où il y aurait trois arches égales placées à la suite les unes des autres. Supposant que l'une des arches extrêmes ait éprouvé une surcharge, de manière que le poids porté par l'unité de longueur du plancher est devenu p', tandis que ce poids a conservé la valeur p dans les deux autres arches, il en résultera une augmentation de la flèche de courbure dans l'arche surchargée, et une diminution de cette flèche dans les deux autres. Nommant δ l'accroissement de f dans la première arche, δ' et δ'' les quantités dont f diminue dans les deux arches suivantes, on verra, par un raisonnement semblable à celui de l'article 141, que l'on doit avoir $\delta = \delta' + \delta''$. Les tensions des chaînes aux extrémités supérieures seront d'ailleurs exprimées respectivement dans les trois arches par les formules

$$\frac{p'h^2(f-\delta)}{2f^2}\sqrt{1+\frac{4(f+\delta)^2}{h^2}},\quad \frac{ph^2(f+\delta')}{2f^2}\sqrt{1+\frac{4(f-\delta')^2}{h^2}},\quad \frac{ph^2(f+\delta'')}{2f^2}\sqrt{1+\frac{4(f-\delta'')^2}{h^2}}.$$

En ayant égard à l'effet du frottement, l'équilibre des chaînes aux sommets des deux supports intermédiaires supposés fixes sera donc exprimé par les deux équations

$$\left.\begin{aligned}
e^{-\frac{\varphi S}{\rho}}\cdot\frac{p'h^2(f-\delta)}{2f^2}\sqrt{1+\frac{4(f+\delta)^2}{h^2}} &= \frac{ph^2(f+\delta')}{2f^2}\sqrt{1+\frac{4(f-\delta')^2}{h^2}},\\
e^{-\frac{\varphi S}{\rho}}\cdot\frac{ph^2(f+\delta')}{2f^2}\sqrt{1+\frac{4(f-\delta')^2}{h^2}} &= \frac{ph^2(f+\delta'')}{2f^2}\sqrt{1+\frac{4(f-\delta'')^2}{h^2}},
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

qui, en y joignant l'équation

$$\delta = \delta' + \delta'',$$

serviront à déterminer les valeurs des trois variations de la flèche dans les trois arches. En écrivant, pour abréger, k au lieu de $e^{-\frac{\varphi S}{\rho}}$, et effectuant l'élimination, on trouve

$$\left.\begin{aligned}
\delta &= \frac{f}{2\cos.\alpha}\cdot\frac{k(1+k)p'^2-2p^2}{k(1+k)p'^2+p^2},\\
\delta' &= \frac{f}{2\cos.\alpha}\cdot\frac{k(2-k)p'^2-p^2}{k(1+k)p'^2+p^2},\\
\delta'' &= \frac{f}{2\cos.\alpha}\cdot\frac{k(2k-1)p'^2-p^2}{k(1+k)p'^2+p^2}.
\end{aligned}\right\}(10)$$

146. Si l'on admettait que la chaîne peut glisser sans frottement sur les supports, on aurait $k=1$, et ces trois expressions deviendraient

$$\left.\begin{aligned}
\delta &= \frac{f}{2\cos.\alpha}\cdot\frac{2p'^2-2p^2}{2p'^2+p^2},\\
\delta' &= \frac{f}{2\cos.\alpha}\cdot\frac{p'^2-p^2}{2p'^2+p^2},\\
\delta'' &= \frac{f}{2\cos.\alpha}\cdot\frac{p'^2-p^2}{2p'^2+p^2}.
\end{aligned}\right\}(11)$$

Ainsi les diminutions des flèches dans la seconde et dans la troisième arche sont alors égales entre elles. En comparant d'ailleurs à la formule (2) la valeur qui vient d'être trouvée pour δ, on reconnaît que cette dernière valeur est plus grande que la première. Il en résulte qu'à surcharge égale, l'abaissement du point milieu de l'arche surchargée est plus grand dans le cas où il y a deux autres arches à la suite, qu'il ne l'est dans le cas où cette arche surchargée n'est accompagnée que d'une seule arche. Les inconvéniens que l'on aurait à craindre par suite de ces changemens de figure, si on laissait aux chaînes la liberté de glisser sur les supports intermédiaires, deviennent donc plus sensibles lorsque le nombre des arches placées à la suite les unes des autres augmente, circonstance dont il était utile de s'assurer. On peut même conclure des résultats précédens que, si l'on avait deux ponts de même longueur, dont l'un serait partagé en trois arches, et l'autre en deux arches seulement, la valeur absolue des variations des flèches, si les chaînes étaient libres de glisser sur les supports, serait un peu plus grande dans le premier pont que dans le second.

Les principes employés dans les recherches précédentes pouvant s'appliquer facilement à tout autre cas différent de ceux que l'on a considérés, il paraît inutile de continuer ces recherches plus loin : les résultats obtenus suffisent pour établir qu'il est nécessaire, en général, de fixer les chaînes sur les supports intermédiaires, et de rendre ces supports capables de résister à un effort transversal, égal à fort peu près à l'excès de tension horisontale qui peut résulter de la surcharge à laquelle chaque arche est exposée.

§. V.

Des ponts dont le plancher est supporté par des tiges inclinées, comparés avec ceux où le plancher est supporté par des chaînes.

147. On a vu, dans la première partie de ce Mémoire, que l'emploi des tiges inclinées pour soutenir le plancher des ponts avait offert divers inconvéniens, et que ce genre de construction avait été abandonné en Écosse, et remplacé par des chaînes. Cependant, comme il serait peut-être possible de perfectionner le premier de ces systèmes, il est utile de le comparer au second sous le rapport de l'économie de la matière.

La figure 15, planche XI, représente un pont dont le plancher horizontal BD est supporté par des tiges inclinées, dirigées des extrémités supérieures A et C de deux supports à des points également espacés sur la longueur de ce plancher. Désignant toujours par p le poids du plancher pour une unité de longueur, et représentant par e la distance des points d'attache de deux tiges consécutives, on devra considérer le point extrême m de chaque tige Am comme chargé du poids pe. Ce poids se décompose en deux forces : l'une dirigée suivant mA, dont la valeur, en nommant φ l'angle AmB, est $\frac{pe}{\sin.\varphi}$; l'autre dirigée horizontalement, et égale à $\frac{pe}{\text{tang.}\varphi}$. La première force produit la tension supportée par la tige Am : la seconde force peut être regardée, ou comme produisant une tension dans le sens nm, qui sera détruite par la tension égale et opposée résultant de la charge supportée en n; ou bien comme produisant une pression dans le sens mB, qui serait détruite par la résistance de la culée. Ainsi le plancher doit être construit de manière à pouvoir résister aux tensions ou aux pressions qui s'exerceront nécessairement dans le sens de la longueur de ce plancher.

Supposons qu'entre le point B et le point m il y ait i divisions de la longueur e: la distance Bm sera égale a ie; et si nous désignons par f la hauteur AB des supports, nous aurons $\sin.\varphi = \frac{f}{\sqrt{f^2+i^2e^2}}$, $\text{tang.}\varphi = \frac{f}{ie}$. Par conséquent la tension ou pression horizontale résultant de l'action du poids agissant au point m pourra s'exprimer par

$$\frac{pe}{f}.ie;$$

et la tension produite dans le sens de la tige Am, par

$$\frac{pe}{f}\sqrt{f^2+i^2e^2}.$$

La tige Am devra offrir la force nécessaire pour résister à cette tension.

148. Les tensions ou pressions qui s'exercent dans le sens de la longueur du plancher, aux divers points d'attache des tiges inclinées, s'ajoutent successivement les unes aux autres. Les tensions ou pressions qui s'exercent aux points d'attache des 1.re, 2.e, 3.e, ...i.e tiges, à compter de la culée, étant exprimées respectivement par $\frac{pe^2}{f}.1$, $\frac{pe^2}{f}.2$, $\frac{pe^2}{f}.3$,.... $\frac{pe^2}{f}.i$, on voit que les parties du plancher comprises entre la 1.re et la 2.e tiges, la 2.e et la 3.e, la 3.e et la 4.e, &c. la i.e et la $(i+1)$.e, sont tendues avec des forces représentées respectivement par

$$\frac{pe^2}{f}.1,\ \frac{pe^2}{f}(1+2),\ \frac{pe^2}{f}(1+2+3),\ldots\ \frac{pe^2}{f}(1+2+3+\ldots+i).$$

Par conséquent, si i représente le nombre total des divisions comprises dans chaque moitié de la travée, la tension supportée par la partie E du plancher, tension qui est la plus grande de toutes, sera exprimée par

$$\frac{pe^2}{f}.\frac{i(i+1)}{1.2};$$

ou, en désignant par h la moitié de la distance des supports, ce qui donne $i=\frac{h}{e}$, par

$$\frac{ph^2}{2f}\left(1+\frac{e}{h}\right). \qquad (1)$$

Si les parties du plancher étaient comprimées et non tendues par suite des actions horizontales dont il s'agit, la formule (1) exprimerait la pression supportée par les parties du plancher contiguës aux culées. Il y aura tension ou pression dans les parties du plancher suivant la manière dont ce plancher sera construit : si les parties se contractent plus facilement qu'elles ne s'allongent, il y aura tension; si au contraire elles s'allongent plus facilement qu'elles ne se contractent, il y aura pression.

149. Les supports AB et CD soutiennent aux extrémités supérieures A et C des actions transversales, auxquelles il faut faire équilibre par des chaînes de retenue. Ces actions sont évidemment égales à la somme des composantes horizontales des tensions de toutes les tiges qui aboutissent à chacun de ces points, somme qui vient d'être calculée, et dont la formule (1) représente la valeur. L'effort horizontal qui s'exerce en A et C a donc pour limite la quantité $\frac{ph^2}{2f}$, lorsqu'on suppose les divisions du plancher de plus en plus petites. Cette limite est précisément la valeur (17), trouvée article 113 pour la tension horizontale Q, dans les ponts soutenus par des chaînes. Ainsi, dans les deux systèmes, les supports sont sollicités de la même manière aux extrémités supérieures; mais dans les ponts soutenus par des tiges inclinées, il s'exerce en outre, dans la di-

rection du plancher, des actions dont la somme est égale à la tension Q, et qui n'existent point dans les ponts soutenus par des chaînes.

150. On voit d'après ce qui précède que, dans un pont du genre de ceux dont il s'agit, composé de plusieurs travées placées à la suite les unes des autres, il serait nécessaire, comme dans les ponts soutenus par des chaînes, de rendre les supports intermédiaires capables de résister aux extrémités supérieures à l'excès de tension horizontale dû à la surcharge à laquelle une arche est exposée. Supposons d'ailleurs que les efforts exercés dans la direction du plancher ne soient point détruits par la résistance des parties de ce plancher à l'extension, en sorte que ces parties soient contractées par ces efforts: il sera nécessaire de plus que les supports intermédiaires soient capables de résister au niveau du plancher à un excès de poussée horizontale dû à la même surcharge; excès qui est précisément égal à l'excès de tension horizontale que cette surcharge produit. Il paraît donc impraticable, en général, de former ces soutiens intermédiaires par des piles minces ou des palées en bois supportant des mâts verticaux, qui ne pourraient offrir presque aucune résistance à une action transversale.

151. Les tiges inclinées ne paraissent pas disposées de la manière la plus convenable, quand on les fait toutes aboutir à l'extrémité supérieure des supports. En effet, on a vu que la tension d'une tige formant un angle φ avec l'horizon était proportionnelle à $\frac{1}{\sin.\varphi}$. La longueur de cette tige est proportionnelle à $\frac{1}{\cos.\varphi}$. La dépense pouvant être censée proportionnelle au produit de la longueur par la tension, elle l'est à la quantité $\frac{1}{\sin.\varphi.\cos.\varphi}$, dont la moindre valeur répond à $\varphi = 45°$. Ainsi il conviendrait de diriger toutes les tiges parallèlement les unes aux autres, en les inclinant d'un demi-angle droit sur l'horizon. En admettant cette disposition, représentée fig. 16, pl. XI, toutes les tiges inclinées sont également tendues avec la force

$$pe.\sqrt{2};$$

et les efforts exercés horizontalement aux extrémités inférieures m de chaque tige sont tous égaux à pe. Les parties du plancher comprises entre la 1.re et la 2.e tige, la 2.e et la 3.e, la 3.e et la 4.e, &c., à compter de la culée, sont donc tendues avec des forces représentées respectivement par

$$pe.1,\ pe.2,\ pe.3, \ldots\ pe.i,$$

en sorte que la tension supportée par la partie E est

$$ph, \qquad (2)$$

c'est-à-dire égale au poids de la moitié de la travée.

152. Les ponts supportés par des tiges inclinées ne forment point, comme les ponts soutenus par des chaînes, un système flexible, et susceptible de changer de figure par suite d'une distribution différente de la charge. Si l'on considère les poteaux comme des verges rigides, les parties du plancher comprises entre le pied de chaque tige, et les tiges elles-mêmes, comme des fils inextensibles, la figure du système doit être regardée comme invariable, et ne peut éprouver que les légères modifications dues à l'élasticité des matériaux. Cette propriété appartient également aux ponts formés d'une seule ou de plusieurs travées, pourvu que, dans ces derniers, les supports établis sur les piles offrent assez de stabilité pour ne point céder par l'effet de la surcharge à laquelle une travée peut être exposée. Mais il n'en serait pas de même si les supports intermédiaires avaient la liberté de plier ou de s'incliner : le plancher d'une travée surchargée pourrait alors s'abaisser, tandis que les planchers des travées voisines se souleveraient; à moins que ces planchers ne fussent construits de manière à présenter par eux-mêmes une résistance suffisante à ces mouvemens.

153. Nous remarquerons maintenant que, quel que soit le système de construction adopté pour un pont, on donnera toujours aux pièces des dimensions à peu près proportionnelles aux tensions qu'elles supportent. Par conséquent, si nous multiplions la longueur de chaque pièce par la tension, et si nous ajoutons tous les produits, nous aurons un nombre proportionnel au volume de matière employé, ou à la dépense que causeront les pièces, et d'après lequel on pourra juger, sous ce rapport, du degré de perfection de chaque système.

En s'occupant d'abord des ponts dont le plancher est soutenu par des tiges rayonnant de l'extrémité supérieure des supports (fig. 15, pl. XI), on aura en premier lieu $\frac{pe}{f}\sqrt{f^2+i^2e^2}$ pour la tension de la tige dont le numéro est i, et $\sqrt{f^2+i^2e^2}$ pour la longueur de cette tige. Le produit dont il s'agit est donc

$$\frac{pe}{f}(f^2+i^2e^2);$$

et la somme des produits semblables pour une des moitiés de la travée est

$$\frac{pe}{f}[if^2+(1+2^2+3^2+\ldots\ldots+i^2)e^2],\ \text{ou}\ \frac{p.ie}{f}\left[f^2+\left(\frac{i^2}{3}+\frac{i}{2}+\frac{1}{6}\right)e^2\right].$$

En mettant à la place de i la valeur $\frac{h}{e}$, cette formule devient

$$\frac{ph}{f}\left(f^2+\frac{h^2}{3}+\frac{he}{2}+\frac{e^2}{6}\right).$$

On doit ajouter à cette quantité la somme relative aux pièces qu'il faudra placer dans le plancher, pour résister aux tensions auxquelles les parties de ce plancher sont

soumises : on tiendra compte ainsi, de la manière la plus naturelle et la plus convenable, de l'excès de solidité qu'il est nécessaire de donner au plancher dans les ponts de cette espèce. Or en multipliant successivement la longueur commune e des parties du plancher par les tensions exercées dans chacune de ces parties (tensions dont les valeurs se trouvent article 148), ajoutant les produits, et remarquant qu'on ne doit prendre que la moitié de la longueur de la partie du plancher qui est à la suite de la tige dont le numéro est i, nous aurons pour la somme relative à la moitié de la travée

$$\frac{pe^2}{f}\left[1+3+6+\ldots\ldots+\frac{(i-1)i}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{i(i+1)}{2}\right],\ \text{ou}\ \frac{pe^2}{f}\left[\frac{(i-1)i(i+1)}{2.3}+\frac{i(i+1)}{2.2}\right].$$

Cette quantité, quand on remplace i par la valeur $\frac{h}{e}$, se change en

$$\frac{ph}{f}\left(\frac{h^2}{6}+\frac{he}{4}+\frac{e^2}{12}\right):$$

en l'ajoutant à la quantité trouvée ci-dessus pour les tiges inclinées, on aura définitivement

$$\frac{ph}{f}\left(\frac{h^2}{2}+f^2+\frac{3he}{4}+\frac{e^2}{4}\right) \qquad (3)$$

pour la somme des produits des longueurs et des tensions des pièces principales, dans les ponts du genre de ceux dont il s'agit.

154. A l'égard des ponts soutenus par des tiges parallèles inclinées d'un demi-angle droit (fig. 16, pl. XI), la tension d'une tige est $pe.\sqrt{2}$; la longueur, $ie.\sqrt{2}$; et le produit de ces deux quantités,

$$2.pe^2.i.$$

La somme des produits semblables, pour une des moitiés de la travée, est

$$2.pe^2(1+2+3+\ldots\ldots+i),\ \text{ou}\ 2pe^2.\frac{i(i+1)}{1.2},$$

c'est-à-dire

$$ph(h+e).$$

La somme des produits des longueurs des pièces du plancher par les tensions de ces pièces est

$$pe^2\left(1+2+3\ldots\ldots+i-1+\frac{i}{2}\right),\ \text{ou}\ pe^2\left[\frac{(i-1)i}{1.2}+\frac{i}{2}\right],$$

c'est-à-dire

$$\frac{ph^2}{2};$$

O

quantité qui, étant ajoutée à la précédente, donne

$$ph\left(\frac{3h}{2}+e\right). \qquad (4)$$

155. Considérons enfin les ponts soutenus par des chaînes. Comme la tension varie d'un point à l'autre de la courbe, on devra prendre le produit de la longueur par la tension pour chacun des élémens, puis ajouter tous les produits semblables. La tension au point situé à la distance x du sommet de la courbe a pour valeur, d'après l'équation (18), article 113, $\frac{ph^2}{2f}\sqrt{1+\frac{4f^2x^2}{h^4}}$; la longueur de l'élément placé en ce point est $dx\sqrt{1+\frac{4f^2x^2}{h^4}}$: la somme cherchée est donc, pour la moitié de la longueur des chaînes,

$$\frac{ph^2}{2f}\int_0^h dx\left(1+\frac{4f^2x^2}{h^4}\right), \text{ ou } \frac{ph}{f}\left(\frac{h^2}{2}+\frac{2f^2}{3}\right).$$

On doit ensuite tenir compte des tiges verticales de suspension. La longueur de la tige dont le numéro, compté du milieu de l'arche, est i, en désignant par e l'intervalle de deux tiges consécutives, a pour expression $\frac{f.e^2}{h^2}\left(\frac{2i-1}{2}\right)^2$; et la tension commune des tiges est pe. On a donc pour la somme des produits des longueurs et des tensions des tiges de suspension, dans une des moitiés de l'arche,

$$\frac{pf.e^3}{h^2}\left(\frac{1}{4}+\frac{3^2}{4}+\frac{5^2}{4}+\ldots\ldots\frac{(2i-1)^2}{4}\right), \text{ ou } \frac{pf.e^3}{h^2}\left(\frac{i^3}{3}-\frac{i}{12}\right),$$

formule qui devient, en remplaçant i par $\frac{h}{e}$,

$$\frac{ph}{f}\left(\frac{f^2}{3}-\frac{e^2f^2}{12h^2}\right).$$

Cette quantité, étant ajoutée à la précédente, donne pour la somme des produits des longueurs et des tensions des pièces, dans les ponts soutenus par des chaînes,

$$\frac{ph}{f}\left(\frac{h^2}{2}+f^2-\frac{e^2f^2}{12h^2}\right). \qquad (5)$$

156. En examinant les formules (3) et (4), on reconnait que les valeurs de ces formules diminuent avec la quantité e, en sorte qu'il y a de l'avantage, dans les deux premières espèces de ponts, à multiplier les divisions du plancher. En supposant d'ailleurs la longueur e des divisions de plus en plus petite, les valeurs des formules (3) et (5) s'approchent d'une limite commune, qui est

$$\frac{ph}{f}\left(\frac{h^2}{2}+f^2\right); \qquad (6)$$

et cette limite, quand on fait $h=f$, ne diffère point de la limite dont s'approche la formule (4), en y supposant également la quantité e de plus en plus petite. On peut juger, d'après ces résultats, qu'étant données la longueur du plancher d'un pont et la hauteur des supports, les diverses dispositions qu'on pourrait adopter pour soutenir le plancher, soit par des tiges inclinées, soit par des chaînes, causeront des dépenses sensiblement égales entre elles. La considération de l'économie ne peut donc influer sur le choix à faire entre ces dispositions.

157. On peut remarquer que la plus petite valeur de la formule (6) répond à la supposition $f=\frac{h}{\sqrt{2}}$. Ainsi la dépense des chaînes et des tiges de supension est la moindre possible, quand la hauteur des supports est environ le tiers de la longueur du plancher.

§. VI.

Des moyens de fixer dans le sol les extrémités des chaînes de retenue.

158. On peut adopter diverses dispositions pour fixer dans le sol les extrémités des chaînes : nous allons indiquer les principales, et examiner les conditions d'équilibre d'après lesquelles on doit en faire l'établissement

La disposition la plus simple consiste à prolonger dans la terre les chaînes de retenue, sans en changer la direction, et à placer à l'extrémité une plate-forme transversale CD (fig. 17, pl. XI), formée par un châssis en charpente ou une plaque de fer fondu. Il est difficile de soumettre exactement au calcul les conditions de l'équilibre du système. On doit concevoir, toutefois, que l'effort exercé dans la direction de la chaîne tend à détacher du massif de terre dans lequel elle pénètre, un solide dont le quadrilatère $CDFE$ représente le profil. Ce solide, ayant pour base la plaque ou plate-forme CD, est terminé par deux faces inclinées CE, DF, et par deux autres faces latérales comprenant entre elles la plaque CD. La position de la base CD est donnée, aussi bien que celle de la face supérieure EF ; mais les directions des autres faces sont inconnues. On peut les déterminer de la manière suivante. Le solide $CDFE$ doit être regardé comme étant soutenu sur le plan incliné DF, et maintenu, 1.° par l'action de la pesanteur ; 2.° par les résistances provenant du frottement et de l'adhérence des terres, résistances qui s'exercent dans toute l'étendue des faces CE et DF, et des deux faces latérales. En faisant diverses hyptohèses sur les directions de ces quatres faces, et comparant, pour chacune, l'action de la chaîne pour produire le glissement aux résistances qui s'y opposent, on peut d'abord reconnaître quelles directions on doit supposer aux faces pour que l'action de la chaîne

se trouve la plus grande possible par rapport à la résistance : les directions ainsi trouvées sont évidemment celles qu'on doit admettre pour vérifier l'équilibre du système. On s'assurera donc qu'en supposant effectivement les faces du solide ainsi déterminées, les résistances qui s'opposent au glissement surpassent l'action de la chaîne qui tend à le produire. En considérant la question de cette manière, la solution ne renferme rien d'arbitraire. On sait que les recherches relatives au problème de la poussée des terres ont donné les moyens d'évaluer, par des expériences faciles, les résistances provenant du frottement et de la cohésion dans les divers terrains.

159. En faisant de la plaque ou plate-forme *CD* (fig. 18, pl. XI), la base d'une construction en maçonnerie *CDdc*, formant une portion de voûte, on augmente le volume des matières qui seraient entraînées par la chaîne de retenue *AN*, si la tension de cette chaîne venait à l'emporter. La figure *CDdFE* représente alors le profil du prisme que cette chaîne tend à faire glisser de bas en haut sur le plan incliné *dF*. On peut appliquer ici ce qui a été dit dans l'article précédent sur la manière de déterminer les directions des lignes *CE*, *dF*, aussi bien que celles des faces latérales du prisme, et sur la vérification de l'équilibre du système.

160. On pourrait encore considérer cet équilibre d'une autre manière, en concevant que la chaîne, au lieu de faire glisser le massif de terre qu'elle tend à déplacer, soulève ce massif en le faisant tourner sur un axe fixe. La nature de la construction n'assigne point ici d'avance une position déterminée à cet axe. Si le massif de terre et de maçonnerie dans lequel la chaîne pénètre, était un corps homogène et incompressible, quoique susceptible de se diviser suivant une direction quelconque, l'axe dont il s'agit serait nécessairement placé à la surface du sol, par exemple en *G* (fig. 19). On admettrait alors qu'un prisme, dont le quadrilatère *CDGE* représente le profil, détaché de la masse du terrain par l'action de la chaîne, se soulève en tournant sur l'axe *G*. L'action de la chaîne, pour opérer ce mouvement, serait mesurée par le produit de la tension multipliée par la perpendiculaire abaissée du point *G* sur *AN*. La résistance du prisme serait mesurée par le produit du poids de ce prisme multiplié par la distance du centre de gravité à l'axe *G*; auquel il faudrait ajouter les momens, pris par rapport au même axe, des résistances provenant de la cohésion des terres sur les faces *CE* et *DG*, et de la cohésion réunie au frottement sur les faces latérales du prisme. Il faudrait essayer diverses directions pour les faces *DG* et *CE*, aussi bien que pour les faces latérales du prisme, et choisir celles qui rendraient la somme des momens des résistances la plus petite possible par rapport au moment de la tension de la chaîne : on s'assurerait ensuite, ces directions étant admises, que la tension ne peut l'emporter. La compressibilité de la terre ne permet pas d'ailleurs que la rotation puisse s'effectuer autour d'un axe placé à la surface du sol. Il faudrait que le prisme de terre

soulevé trouvât un appui contre une surface *GH* ayant assez d'étendue pour soutenir la pression que cette surface aurait à supporter : ce serait donc en *H* qu'il faudrait concevoir l'axe de rotation placé. Je ne m'arrêterai pas plus long-temps sur ces considérations, qu'il était toutefois nécessaire d'indiquer. On prévoit, en effet, que si l'on s'est assuré, conformément à l'article précédent, que la tension de la chaîne ne peut détacher aucun prisme de terre en le faisant glisser sur un plan incliné, on n'aura point à craindre non plus, en général, qu'elle puisse en soulever aucun en le faisant tourner sur un axe. La vérité de cette proposition est évidente, lorsque l'on considère l'équilibre sans avoir égard aux résistances provenant du frottement et de la cohésion. En effet, un corps soumis à l'action de plusieurs forces ne peut être en équilibre sur un plan incliné, qu'autant que la résultante de ces forces est perpendiculaire au plan, et dirigée de manière à presser la base du corps contre ce plan : or cette résultante ne pourra jamais alors faire tourner le corps autour d'aucun axe fixe.

161. Il paraîtra toujours prudent, dans les calculs tels que ceux dont il vient d'être question, de ne pas attribuer beaucoup d'influence aux résistances provenant de la cohésion du terrain, dont l'évaluation est sujette à de grandes incertitudes, et de compter principalement sur l'action du poids des matières que les chaînes tendent à soulever. En adoptant les dispositions précédentes, ces matières se trouvent sollicitées suivant la direction inclinée des chaînes : par conséquent, le poids est décomposé suivant cette direction ; une grande partie de l'action de ce poids est perdue, et employée à presser inutilement le plan incliné sur lequel il repose. Cette circonstance peut engager, dans les constructions où il s'exerce des efforts considérables, à changer la direction de la chaîne, et à la faire pénétrer verticalement dans le sol. Alors la résistance opposée à la tension de cette chaîne est au moins égale au poids des matières comprises dans le solide *CDFGE* (fig. 20, pl. XI), augmenté de l'effet de la cohésion des terres sur les faces de ce solide. Il faut remarquer d'ailleurs que, la chaîne devant porter en *N* sur une courbe d'appui, il s'exerce contre cette courbe une pression égale à la résultante des tensions qui ont lieu suivant les deux directions *NA*, *NC*. Cette pression est détruite par l'inertie du massif compris entre la chaîne et le parement de la culée du pont : mais, pour prévenir l'effet de la compressibilité des couches supérieures de ce massif, il est nécessaire de placer en *N* une construction en maçonnerie destinée à recevoir la courbe d'appui, et consolidée par un arc-boutant *HI* qui s'appuie contre une fondation solide.

Il résulterait du frottement de la chaîne sur la courbe d'appui placée en *N*, si cette courbe était absolument fixe, que la tension qui a lieu dans la partie *NA* de la chaîne ne se transmettrait pas tout entière dans la partie *NC* : la différence de ces deux tensions se calculerait de la manière indiquée article 130. Supposons que, la

tension suivant NA étant exprimée par R, on trouve ainsi une valeur R' plus petite que R pour la tension suivant NC: il ne faudrait pas en conclure qu'il suffit de rendre égale à R' la résistance dont l'action s'exerce à l'extrémité C de la chaîne. En effet, si l'équilibre venait à être rompu, la courbe d'appui et la construction qui la supporte étant elles-mêmes entraînées, l'effet du frottement disparaîtrait entièrement : il est donc nécessaire que la résistance exercée en C soit égale à la tension entière de la chaîne de retenue.

162. Les constructions au moyen desquelles les extrémités des chaînes de retenue se trouvent ainsi fixées, étant cachées sous le sol, la solidité et l'économie sont évidemment les seules considérations dont on puisse en faire dépendre la disposition. Opposer à la tension de la chaîne le poids et l'adhérence de la terre dans laquelle cette chaîne pénètre, paraîtra toujours la disposition la moins dispendieuse qu'il soit possible d'adopter. Il est nécessaire d'ailleurs de placer à l'extrémité de la chaîne une construction en maçonnerie sur laquelle s'appuie un massif de terre d'une grandeur suffisante, et par le moyen de laquelle l'action du poids de ce massif se transmette à la chaîne. Tout se réduit à compenser la longueur de la chaîne et le volume de la maçonnerie, de manière que la dépense soit la moindre possible. On pourrait encore employer d'autres moyens; par exemple, battre des pieux dans la terre, et les lier à l'extrémité de la chaîne, de manière qu'elle ne pût être entraînée sans les arracher. Mais, en examinant les dispositions de ce genre, on s'aperçoit bientôt qu'elles ne peuvent être plus économiques, et qu'elles offrent moins de sûreté. En effet, en employant seulement, pour détruire la tension de la chaîne, le poids d'une masse de terre et de maçonnerie, on ne peut être exposé à aucun mécompte provenant de la mauvaise qualité ou de l'altération progressive des matériaux; et l'on est assuré que l'équilibre établi d'avance, d'après le calcul, subsistera toujours dans les constructions exécutées.

163. Il est essentiel d'observer que, quelle que soit la manière dont l'extrémité de la chaîne est fixée, le poids des matières qui pèsent sur cette extrémité ne peut jamais détruire la composante horizontale de la tension de cette chaîne. Cette composante horizontale, qui, en général, différera peu de la composante horizontale des chaînes de support, représentée par Q dans les paragraphes précédens, ne peut être détruite que par des forces également horizontales. Cette force tend toujours à pousser horizontalement le massif de terrain compris entre le pied de la chaîne de retenue et la culée. La stabilité de ce massif, et l'adhérence avec la terre qui est au-dessous, détruiront la force horizontale dont il s'agit, si l'épaisseur du massif est suffisante, ou s'il y a un intervalle suffisant entre le pied de la chaîne de retenue et la culée; autrement, il serait nécessaire de donner à la culée elle-même assez de stabilité pour qu'elle ne fût point renversée par cette force.

164. Si les chaînes de retenue pénétraient verticalement dans le sol derrière le massif de la culée (fig. 21, pl. XI), ce massif soutiendrait entièrement l'action de la tension horizontale dont il s'agit. M. Stevenson a proposé, dans un cas semblable, de prolonger la chaîne en *ANOC* par-dessous la culée. Cette disposition paraît effectivement la plus convenable pour bien lier le massif de la culée à la chaîne, et faire en sorte que la tension de la chaîne ne puisse l'emporter, sans que ce massif ne se déplace tout entier. L'action de la chaîne tend alors à faire tourner le prisme de maçonnerie *ANOC* autour de l'arête extérieure de la base *C;* et cette action est favorisée par la poussée de la terre contre la face postérieure *NO* de la culée. La culée résiste par l'action du poids du prisme *ANOC,* et de l'adhérence de ce prisme à la base. Il faut donc, en faisant abstraction de cette dernière force, que le moment du poids du prisme, pris par rapport à l'axe *C,* surpasse la somme des momens de la tension de la chaîne et de la poussée de la terre, pris par rapport au même axe. Cette manière de fixer l'extrémité de la chaîne paraît devoir être plus coûteuse, en général, que celles dont il a été question dans les articles précédens.

165. Le sol dans lequel les chaînes sont fixées, est presque toujours exposé à être pénétré par l'eau à l'époque des crues de la rivière : cette circonstance peut produire des effets différens, suivant la nature du terrain. L'humidité qui pénètre dans un terrain, change les valeurs des constantes qui mesurent les résistances provenant de la cohésion et du frottement, et en général tend à diminuer ces valeurs. Il n'en résultera pas d'inconvénient, si l'on n'a point trop compté sur l'action des résistances dont il s'agit; mais si la nature de la terre, comme cela arrive quelquefois, était telle, que l'eau, en la pénétrant, la rendît fluide, c'est-à-dire capable de presser également suivant toutes les directions, en raison du poids dont elle est chargée, cette terre deviendrait alors tout-à-fait incapable de résister à la tension de la chaîne. Il ne resterait plus, pour balancer cette tension, que le poids de la construction en maçonnerie liée à la chaîne; et encore on ne devrait pas compter sur la totalité du poids de cette construction, mais seulement sur la différence entre ce poids et celui du volume de terre fluide dont elle occupe la place. On peut juger, d'après cette remarque, combien il importe de reconnaître avec certitude la qualité du terrain dans lequel seront fixées les extrémités des chaînes.

§. VII.

Détermination de la grosseur des chaînes d'après la résistance du fer forgé. De l'allongement des chaînes et de l'abaissement du plancher, par suite de l'extensibilité du fer.

166. Un des principaux élémens de l'établissement des ponts suspendus est la connaissance de la résistance que le fer forgé oppose à l'extension. Les résultats des expériences faites pour connaître cette résistance, sont exposés dans divers ouvrages (*). On doit distinguer, parmi ces expériences, celles que M. Barlow a publiées en Angleterre en 1817, dans son *Essay on the strength and stress of timber,* et que l'on trouve à la suite de ce Mémoire.

L'objet principal des recherches expérimentales a toujours été de déterminer la force nécessaire pour rompre une pièce de fer tirée par les deux extrémités. Les différences considérables qu'offrent les fers, dans la substance et dans la contexture, ont apporté des différences analogues dans les résultats des épreuves : il est donc impossible de prévoir exactement d'avance la force du fer qui sera employé à une construction ; on ne peut la connaître que par des expériences spéciales. Il paraît toutefois que des fers de bonne qualité offriront généralement à la rupture une résistance comprise entre 35 et 45 kilogrammes, pour chaque millimètre carré de la section transversale.

La connaissance de la force nécessaire pour rompre les barres de fer, ne suffit pas d'ailleurs pour l'objet que nous avons en vue. Les expériences ont appris que les fers commençaient à s'allonger très-sensiblement sous des poids moindres que ceux qui en causent la rupture : après un semblable allongement, les pièces déchargées ne reprennent pas les dimensions primitives. Il paraît nécessaire, en établissant un pont, de donner aux pièces une force telle, qu'un effet semblable ne puisse pas avoir lieu, et qu'après l'action des plus grandes charges accidentelles qu'elles puissent avoir à supporter, ou bien après le plus grand allongement qu'elles puissent subir, l'élasticité naturelle du fer n'étant point altérée, ces pièces reviennent d'elles-mêmes aux dimensions qui conviennent à l'état d'équilibre ordinaire. L'étude approfondie des propriétés du fer forgé, considéré sous ce point de vue, exigerait des recherches spéciales, au défaut desquelles on doit se borner à déduire des expériences connues quelques résultats approchés.

(*) *Voyez* particulièrement le *Traité de la construction des ponts*, par M. Gauthey, tome II ; le *Traité de l'art de bâtir*, par M. Rondelet, tome IV ; l'*Essai théorique et expérimental sur la résistance du fer forgé*, par M. Duleau, ingénieur des ponts et chaussées, Paris, 1820.

167. M. Duleau établit, comme résultat général de ses expériences sur la flexion du fer forgé, qu'une verge de fer tirée dans le sens de la longueur s'allonge de 0,0001 de cette longueur, sous une tension de 2 kilogrammes pour chaque millimètre quarré de la section transversale (*). L'allongement sera donc les 0,000 05 de la longueur de la pièce pour une tension de 1 kilogramme par millimètre carré. Ce résultat n'est pas déduit d'expériences directes : il est fondé sur la comparaison des courbures affectées par des lames de fer avec les poids qui ont produit ces courbures. Les expériences ont offert des différences qui s'élèvent à un quart environ, en plus ou en moins ; en sorte que le nombre ci-dessus a varié entre les limites 0,000 038 et 0,000 062. Enfin le résultat dont il s'agit s'applique à l'accourcissement du fer comprimé comme à l'allongement du fer tendu, et cet accourcissement doit être aussi d'environ 0,000 05 pour une compression de 1 kilogramme par millimètre carré de la section transversale.

168. Il ne sera pas inutile de comparer ce résultat avec des expériences directes, faites par M. Pictet, sur l'accourcissement d'une barre de fer soumise à diverses charges (**). Cette barre avait 11 lignes de diamètre ; et en estimant à 40 kilogrammes la force de cohésion sur un millimètre carré, le poids nécessaire pour la rompre aurait été $\frac{\pi}{4}(24,86)^2(40)$, ou environ 19 400 kilogrammes. On ne l'a chargée que de poids très-petits par rapport à celui-ci, et qui n'ont pas dépassé 127 kilogrammes. Les accourcissemens de la barre ont augmenté à très-peu près proportionnellement aux charges, quoique un peu plus rapidement ; et, par une moyenne entre quatre expériences, l'accourcissement a été les 0,000 005 de la longueur pour une charge de 65 livres. Cela revient à $\frac{0,000\,005}{31,82}\cdot\frac{\pi}{4}(24,86)^2 = 0,000\,076$ pour une charge d'un kilogramme par millimètre carré : ce nombre est plus grand que le résultat déduit des expériences de M. Duleau. M. Pictet a observé que la barre mise en expérience, après avoir été comprimée de 0,000 022 sous un poids de 260 livres, ne revenait pas tout-à-fait à la longueur primitive, et qu'il s'en fallait de 0,000 002 3. Mais il est très-vraisemblale que la barre serait revenue exactement à la même longueur après un temps suffisant, plusieurs observations indiquant que les effets des forces moléculaires dépendent sensiblement de la durée de l'action de ces forces.

169. On peut aussi vérifier le résultat établi par M. Duleau, au moyen de la valeur qui s'en déduit pour la vîtesse du son dans le fer forgé. L'auteur observe que cette valeur est 5018 mètres par seconde. M. de Laplace a trouvé que les

(*) *Essai théorique et expérimental sur la résistance du fer forgé*, page 54.

(**) *Bibliothèque universelle*, mars 1816.

expériences de M. Chladni s'accordaient avec celles de Borda sur l'élasticité du cuivre jaune, pour donner 3 597 mètres pour la vîtesse du son dans cette dernière substance (*); et, d'après les expériences de M. Chladni, les vîtesses du son dans le fer forgé et dans le cuivre sont entre elles dans le rapport des nombres $16\frac{2}{3}$ et 12 (**). La vîtesse du son dans le fer est donc, d'après ces expériences, $3\,597\,\frac{16.67}{12} = 4\,997$ mètres, valeur qui diffère fort peu de celle donnée par M. Duleau.

Nous adopterons ici l'expression de la force d'élasticité du fer forgé donnée par les expériences de cet ingénieur : cette expression servira à calculer les variations de longueur qui surviendront dans une barre de fer, en la supposant soumise à des tensions assez faibles pour n'en point altérer la constitution physique, et pour que cette barre reprenne les mêmes dimensions lorsqu'elle cessera d'être tendue.

170. Il est très-important de connaître les limites des tensions que l'on peut ainsi faire supporter au fer forgé sans en altérer la force d'élasticité. Le travail de M. Duleau contient des recherches sur ce sujet. L'auteur a considéré l'élasticité d'une verge fléchie transversalement, comme ayant commencé à s'altérer, lorsque cette verge ne revenait pas exactement à la figure naturelle aussitôt que l'on avait ôté les poids qui avaient opéré la flexion. Il est à remarquer d'ailleurs que, dans les expériences où cette circonstance s'est présentée, la courbure des verges n'avait point cessé d'augmenter proportionnellement à la charge, ce qui indique que la constitution physique des fers était très-peu altérée ; car, si elle l'eût été sensiblement, la courbure aurait augmenté plus rapidement que la charge. On conclut des expériencesde M. Duleau (***), que l'élasticité était altérée dans quatre verges, où les fibres placées aux faces convexes et concaves avaient éprouvé moyennement une variation de longueur de 0,000 69 ; et que l'élasticité n'était point altérée dans neuf autres verges, où cette variation de longueur avait été moyennement de 0,000 62. La plus petite variation de longueur qui ait entraîné une altération dans l'élasticité, a été 0,000 44 ; la plus grande variation qui n'ait point entraîné une semblable altération, a été 0,001 17. Il paraît donc qu'on peut faire éprouver moyennement au fer forgé un allongement de 0,000 65, sans en altérer la constitution physique.

Un semblable allongement, d'après le résultat énoncé article 167, serait occasionné par une charge de 13 kilogrammes sur chaque millimètre carré de la section transversale : on peut donc conclure de ce qui précède, qu'il serait imprudent d'exposer le fer, dans une construction, à des efforts qui excédassent sensiblement cette limite. Une

---

(*) *Annales de chimie et physique*, 1816, tome III, page 164.

(**) M. Biot, *Traité de physique*, tome II, page 85.

(***) *Essai historique et expérimental sur la résistance du fer forgé*, page 78.

charge de 13 kilogrammes par millimètre carré est environ le tiers de celle qui opérerait la rupture.

171. Parmi les expériences de M. Telford, rapportées par M. Barlow (*), on trouve quelques observations sur l'extension manifestée avant la rupture par des barreaux de fer tirés dans le sens de la longueur. Ces observations apprennent que plusieurs barreaux qui ont rompu sous des charges de 29 tonnes, ont commencé à s'étendre sous une charge moyenne de 17 tonnes. Un autre barreau, qui a rompu sous le poids de 100 tonnes, avait commencé à s'étendre sous 45 tonnes. Lorsque l'auteur indique que la barre a *commencé à s'étendre*, il faut entendre qu'elle a manifesté alors une extension subite et considérable, indiquant une altération dans la constitution physique de cette barre. En effet, la dernière des pièces dont on vient de parler, de 2 pouces anglais de diamètre, s'était étendue de $\frac{1}{120}$ de la longueur sous la charge de 45 tonnes; extension bien plus grande que celle qu'on calculerait en supposant qu'une charge de 1 kilogramme par millimètre carré produit un allongement de 0,000 05. La même pièce, abandonnée ensuite à elle-même, au lieu de revenir à la longueur primitive, ne s'est accourcie que de $\frac{1}{410}$. On conclut de ces expériences, que la force et la constitution physique des barres de fer forgé sont en général altérées par des charges qui dépassent un peu la moitié du poids nécessaire pour opérer la rupture. On ne doit donc jamais exposer les pièces à des charges semblables; et ces expériences s'accordent avec les résultats donnés par M. Duleau pour établir que les plus grands efforts auxquels les pièces seront exposées dans les constructions, doivent excéder fort peu le tiers des charges qui opéreraient la rupture (**).

172. Il paraît qu'on peut être assuré d'ailleurs qu'une construction établie d'après cette règle n'est exposée à aucun accident, si elle n'offre point de pièces défectueuses (ce dont il est toujours possible de s'assurer, en soumettant les pièces, avant de les employer, à des tensions déterminées). On ne peut avoir aucun motif de douter de la solidité et de la durée de cette construction, à moins d'admettre que l'action prolongée d'une charge permanente, jointe aux variations de la température, doit, avec le temps, changer la constitution du fer et en altérer la force d'élasticité. Toute altération chimique dans la nature du fer peut être prévenue au moyen d'enduits entretenus avec soin. Quant aux altérations qui proviendraient des causes physiques dont on vient de parler, on ne pourrait en admettre la possibilité sans proscrire entièrement l'emploi du fer tiré suivant la longueur dans les constructions durables, emploi qui est cependant

(*) *An Essay on the strength and stress of timber*, pag. 229. *Voyez* les expériences à la suite de ce Mémoire.

(**) La règle que nous adoptons ici, est d'accord avec les idées émises par la plupart des ingénieurs anglais, lors de l'enquête relative à la construction du pont projeté par M. Telford sur le détroit de Menai. *Voyez* la première partie de ce Mémoire, article 33 et suivans.

justifié par l'expérience. On ne peut craindre que les chaînes, après s'être allongées pendant l'été, ne reprennent pas l'hiver suivant les mêmes dimensions. Le procédé ingénieux, imaginé et employé avec succès par M. Molard pour rapprocher deux murs que la poussée d'une voûte avait écartés (*), prouve que des fers échauffés se raccourcissent en se refroidissant, quoique soumis à de grandes tensions. On voit dans un très-grand nombre de constructions italiennes des fers employés comme tirans, pour retenir l'écartement des piliers d'une voûte, ou comme ceintures pour s'opposer à la poussée des dômes : tels sont les cercles qui ceignent le dôme de Saint-Pierre de Rome. Ces fers, tendus fortement et exposés aux variations de la température, remplissent toutefois leur destination.

173. Puisqu'une barre de fer s'étend nécessairement quand elle est tirée par les deux extrémités, l'effet de la charge du plancher d'un pont sera d'allonger les chaînes qui le tiennent suspendu, et par conséquent d'augmenter la flèche de la courbe qu'affecteraient ces chaînes, si elles étaient formées par des verges inextensibles. Des charges additionnelles placées sur le plancher produiront encore dans la flèche de courbure de nouvelles augmentations, qui cesseront en même temps que l'action de ces charges. Il est nécessaire de soumettre ces effets au calcul, et d'être à même de prévoir l'abaissement durable qui se manifestera à l'instant où les chaînes se trouveront chargées pour la première fois du poids du plancher, et les abaissemens momentanés produits par les charges accidentelles.

Pour y parvenir de la manière la plus simple, nous considérerons un fil parfaitement flexible AOB (fig. 22, pl. XI), dont les extrémités sont attachées aux deux points fixes A, B situés sur une même ligne horizontale, et qui est chargé par des poids uniformément répartis sur l'intervalle AB. Ce fil étant d'abord supposé inextensible, les conditions de l'équilibre seront données par les résultats des articles 109 et suivans. En le supposant ensuite extensible, il faudra admettre que, ce fil s'allongeant par l'effet de la tension qu'il supporte, les points se transportent dans une autre courbe $AO'B$, de même nature que la première, mais dont la flèche CO' est plus grande. Soit m' le point de la seconde courbe dans lequel s'est transporté le point m de la première : les positions respectives des points m et m' dépendront de la proportion suivant laquelle chaque élément du fil cède à la tension à laquelle il se trouve exposé. Nous supposerons ici, conformément aux propriétés des corps élastiques constatées par l'observation, et eu égard à ce qu'il ne s'agit que d'allongemens très-petits, que chaque élément du fil s'allonge toujours proportionnellement à la tension qui a lieu dans cet élément.

Cela posé, nommons s l'arc Am, et s' l'arc Am' : ds représentera la longueur

(*) Voyez le *Traité de physique* de M. Biot, tome I, page 181.

primitive de l'élément placé à la suite du point m, et $ds' - ds$ la quantité dont cet élément s'est allongé. Représentons par la constante E le poids qui serait nécessaire, les allongemens étant toujours supposés proportionnels aux charges, pour allonger une portion donnée du fil d'une quantité égale à la longueur de cette portion. Le poids nécessaire pour allonger la portion ds de la quantité $ds' - ds$ sera donc exprimé par $E\frac{ds'-ds}{ds}$: or l'allongement dont il s'agit est le résultat de la tension que le fil supporte en m' : donc, si nous représentons cette tension par T, nous avons l'équation

$$E\frac{ds'-ds}{ds} = T.$$

Nous remarquerons maintenant que, les deux courbes AOB, $AO'B$ étant supposées différer très-peu l'une de l'autre, on peut regarder la tension T qui a lieu au point m' de la seconde courbe, comme ne différant point de celle qui avait lieu au point correspondant m de la première, et supposer égales dans les deux courbes les tensions horizontales représentées par Q. D'après cela, l'équation (a), article 95, donnant $T = Q\frac{ds}{dx}$, l'équation précédente se change en

$$\frac{ds'}{ds} - 1 = \frac{Q}{E}\,\frac{ds}{dx}. \qquad (1)$$

Mettant pour $\frac{ds}{dx}$ la valeur $\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$, remarquant qu'ici $\frac{dy}{dx} = \text{tang.}\,\alpha - \frac{px}{Q} = \frac{p(h-x)}{Q}$, et $Q = \frac{ph^2}{2f}$, il vient d'abord

$$\frac{ds'}{ds} - 1 = \frac{p}{E}\sqrt{\frac{h^4}{4f^2} + (h-x)^2}. \qquad (2)$$

Ce premier résultat apprend de quelle fraction de la longueur chaque partie de la chaîne s'est allongée. On voit que la chaîne s'est nécessairement allongée dans toutes les parties; que le plus petit allongement a lieu au point O, où il est exprimé par $\frac{ph^2}{2Ef}$; et le plus grand, aux points A et B, où il est exprimé par $\frac{ph}{2Ef}\sqrt{h^2+4f^2}$.

174. En multipliant l'équation (1) par ds, et remplaçant dans le second membre ds et Q par les valeurs de ces quantités, il vient

$$ds' - ds = \frac{2pf}{E.h^2}\left(\frac{h^4}{4f^2} + (h-x)^2\right)dx;$$

et en intégrant, on a

$$s' - s = \frac{2pf}{Eh^2}\left[\left(\frac{h^4}{4f^2} + h^2\right)x - hx^2 + \frac{1}{3}x^3\right],$$

équation qui donnera la quantité dont s'est allongé l'arc Am terminé au point dont l'abscisse est x, lorsque cet arc s'est transporté en Am'.

Au point O, l'abscisse est h, et la longueur de l'arc AO a été représentée dans les paragraphes précédens par c. Par conséquent, si nous nommons c' la nouvelle longueur AO' acquise par cet arc, l'équation précédente donnera, en faisant $x = h$,

$$c' = c + \frac{ph^3}{E.2f}\left(1 + \frac{4f^2}{3h^2}\right). \quad (3)$$

Le second terme de la parenthèse pouvant être négligé dans la plupart des applications, on voit que l'augmentation de la longueur de la moitié de la courbe est exprimée à fort peu près par la fonction $\frac{ph^3}{E.2f}$. Cette fonction exprimera l'allongement qu'auront subi les chaînes par suite de l'action du poids du plancher, si p représente la partie de ce poids répartie sur chaque unité de longueur. Elle donnera aussi l'allongement résultant d'une charge additionnelle uniformément répartie sur le plancher, en concevant que p représente la charge additionnelle placée sur chaque unité de longueur.

175. En substituant à la place de c la valeur (3) de c' dans la formule (23), article 115, on calculera exactement la valeur f' que prendra la flèche de la courbe, par suite de l'allongement que cette courbe a éprouvé. Dans la plupart des applications, l'amplitude de la courbe est assez petite pour qu'on puisse se borner aux premiers termes dans les séries des formules (22) et (23) du paragraphe I.er On a alors simplement $f^2 = \frac{3}{2}(c - h)h$. Lorsque c augmente d'une petite quantité γ, ce qui entraîne une augmentation correspondante φ dans la flèche f, on a de même $(f + \varphi)^2 = \frac{3}{2}(c + \gamma - h)h$; ou, en retranchant l'équation précédente et tirant la valeur de φ,

$$\varphi = -f + \sqrt{\frac{3\gamma h}{2} + f^2},$$

expression qui, lorsque γ est fort petit, diffère très-peu de

$$\varphi = \frac{3h}{4f}\gamma. \quad (4)$$

Ainsi l'abaissement φ du point milieu du plancher du pont, résultant d'une très-petite augmentation survenue dans la demi-longueur des chaînes, est à fort peu près égal aux trois quarts de cette augmentation γ, multipliés par le rapport $\frac{h}{f}$ de la demi-longueur du plancher à la flèche. Si d'ailleurs nous mettons à la place de γ, dans la formule (4), la valeur de $c' - c$ donnée par l'équation (3), et si nous écrivons ϖ à la place de p, en représentant par ϖ une charge additionnelle placée sur chaque unité de longueur du plancher, dont l'effet est de produire dans la demi-longueur des chaînes l'accroissement γ, et dans la longueur de la flèche l'accroissement φ, il viendra

$$\varphi = \frac{3\varpi h^4}{8Ef^2}\left(1 + \frac{4f^2}{3h^2}\right); \tag{5}$$

d'où l'on conclut que l'abaissement du point milieu du plancher, provenant d'une charge ϖ placée sur chaque unité de la longueur de ce plancher, est à fort peu près représenté par la fonction $\frac{3\varpi h^4}{8Ef^2}$.

176. Quant à la valeur de la constante E, en admettant, conformément à ce qui a été dit article 167, qu'il faut un poids de 2 kilogrammes pour allonger de 0,0001 de la longueur une barre de fer dont la section transversale est un millimètre carré, il s'ensuit qu'il faudrait un poids de 20 000 kilogrammes pour allonger cette même barre d'une quantité égale à la longueur entière; on aura donc

$$E = 20\,000^{k}.\Omega, \tag{6}$$

en représentant par Ω l'aire des sections transversales des barres de fer dont les chaînes seront composées, cette aire étant évaluée en millimètres carrés.

177. On peut remarquer que, dans divers ponts qui différeraient par les dimensions, ou par la charge correspondante à l'unité de longueur du plancher, on donnerait toujours à la section Ω une valeur à peu près proportionnelle à la tension horizontale Q à laquelle les chaînes seraient exposées. Ainsi E sera toujours à peu près proportionnelle à Q, c'est-à-dire à $\frac{ph^2}{2f}$, p représentant le poids porté par l'unité de longueur du plancher, lorsque le pont est chargé autant qu'il peut l'être. Mais si l'on met $\frac{ph^2}{2f}$ à la place de E dans la fonction $\frac{3\varpi h^4}{8Ef^2}$, elle devient $\frac{3\varpi h^2}{4pf}$: Ainsi l'abaissement du milieu du plancher provenant de l'extensibilité des chaînes, dû à une charge additionnelle répartie uniformément sur toute la longueur du plancher, est à peu près proportionnel dans divers ponts, 1.° au rapport $\frac{\varpi}{p}$ de la charge additionnelle à la charge sur laquelle on a compté en faisant l'établissement du pont; 2.° au rapport $\frac{h^2}{f}$ du carré de la demi-longueur du plancher à la flèche de la courbure des chaînes : en sorte que l'abaissement dont il s'agit, en supposant constant le rapport de l'ouverture à la flèche, augmente proportionnellement à l'ouverture du pont.

178. Il n'est pas moins utile de connaître l'abaissement qui aurait lieu par suite de l'extensibilité des chaînes, si une charge additionnelle était non pas répartie uniformément sur toute l'étendue du plancher, mais rassemblée au milieu. En désignant, comme dans le paragraphe II, par Q' la valeur que prend la tension horizontale, lorsque la chaîne est chargée à-la-fois du poids $2ph$ réparti uniformément sur AB, et du poids Π suspendu au point O, nous devrons écrire Q' au lieu de Q dans l'équation (1). Nous

aurons de plus, par les équations (6) et (9), articles 120 et 121, tang. $\alpha = \frac{2ph + \Pi}{2Q'}$, $Q' = \frac{ph^2 + \Pi h}{2f'}$. En employant ces valeurs au lieu de celles qui ont été employées dans l'article 173, nous aurons d'abord, au lieu de l'équation (1),

$$\frac{ds'}{ds} - 1 = \frac{1}{2E} \sqrt{\frac{h^2}{f'^2}(\Pi + ph)^2 + [\Pi + 2p(h - x)]^2}, \qquad (7)$$

pour calculer la fraction de la longueur dont chaque élément de la chaîne s'est allongé; puis, au lieu de l'équation (3),

$$c' = c + \frac{ph^3 + \Pi h^2}{E.2f'}\left(1 + \frac{(4p^2h^2 + 6ph.\Pi + 3\Pi^2)f'^2}{3(ph^2 + \Pi h)^2}\right), \qquad (8)$$

pour l'expression de la demi-longueur que prendront les chaînes, par suite de l'action simultanée de la charge répartie uniformément sur la longueur du plancher, p étant la portion portée par l'unité de longueur, et du poids Π placé au milieu de cette longueur. On a vu dans le paragraphe II comment la valeur de f' devait être calculée, et que, dans le cas où Π était fort petit par rapport à $2ph$, on avait à fort peu près, par la formule (12), article 123, $f' = f\left(1 + \frac{\Pi}{4ph}\right)$.

Lorsque la courbe a peu d'amplitude, ce qui est le cas ordinaire des applications, on peut négliger le second terme de la parenthèse dans l'équation (8). En mettant d'ailleurs pour f' la valeur précédente, on a donc, dans le cas dont il s'agit,

$$c' = c + \frac{ph^3 + \Pi h^2}{E.2f\left(1 + \frac{\Pi}{4ph}\right)}, \text{ ou, à fort peu près, } c' = c + \frac{ph^3}{E.2f}\left(1 + \frac{3\Pi}{4ph}\right).$$

Si le poids Π n'existait pas, on aurait simplement, d'après l'art. 174, $c' = c + \frac{ph^3}{E.2f}$: par conséquent, si nous désignons par γ' l'allongement dû à l'action seule du poids Π, nous aurons

$$\gamma' = \frac{3}{8}.\frac{\Pi h^2}{Ef}.$$

179. En se bornant aux premiers termes dans les séries des équations (10) et (11), art. 121 et 122, on a $f'^2 = \frac{3}{2}\left(1 + \frac{\Pi}{2ph}\right)(c - h)h$. Lorsque c augmente d'une petite quantité γ', et f' d'une petite quantité correspondante φ', on a également $(f' + \varphi')^2 = \frac{3}{2}\left(1 + \frac{\Pi}{2ph}\right)(c + \gamma' - h)h$. Retranchant l'équation précédente, et négligeant le carré de φ', on trouve

$$\varphi' = \frac{3h}{4f'}\left(1 + \frac{\Pi}{2ph}\right)\gamma';$$

ce qui donne, pour le cas où il y a un poids placé au milieu du plancher, la relation qui existe entre un petit allongement des chaînes et l'accroissement correspondant de la flèche. En mettant à la place de γ' et de f' les valeurs précédentes, nous aurons, à fort peu près, pour l'accroissement de la flèche due à l'action du poids Π,

$$\varphi' = \frac{9}{32}\frac{\Pi h^3}{Ef^2}. \qquad (9)$$

180. Si, conformément à ce qui a été dit article 177, nous regardons E comme proportionnel à $\frac{ph^2}{f}$, il en résultera que φ' sera proportionnel à $\frac{\Pi h}{pf}$. Ainsi l'abaissement du milieu du plancher provenant de l'action d'un poids placé en ce point, est proportionnel, 1.° au rapport $\frac{\Pi}{p}$ de ce poids à la charge qui a été supposée placée sur l'unité de longueur du plancher quand on a fait l'établissement du pont; 2.° au rapport $\frac{h}{f}$ de la demi-longueur du plancher à la flèche de la courbe des chaînes. Par conséquent, lorsque pour divers ponts le rapport de l'ouverture à la flèche est le même, l'abaissement dont il s'agit ne varie point non plus.

Lorsqu'on place un poids au milieu du plancher d'un pont, ce point s'abaisse par deux causes, 1.° parce que l'action de ce poids fait changer un peu la figure de la courbe des chaînes; 2.° parce qu'elle les fait allonger un peu. Le résultat de l'article 123 donne la portion de l'abaissement due à la première cause, et la formule (9) donne la portion du même abaissement due à la seconde cause. La première portion est proportionnelle au rapport $\frac{\Pi f}{ph}$, et la seconde au rapport $\frac{\Pi h}{pf}$. Elles suivent donc des lois différentes; mais, ce qui est très-remarquable, toutes les deux conservent les mêmes valeurs absolues, lorsqu'on fait croître dans un même rapport la flèche de la courbure des chaînes et l'ouverture des arches.

De l'effet de l'allongement des chaînes de retenue.

181. Les chaînes de retenue, en raison de l'extensibilité du fer, s'allongent lorsque la tension augmente, effet qui se réunit au redressement qu'elles éprouvent alors pour permettre un déplacement à l'extrémité supérieure de ces chaînes. Nous soumettrons cet effet au calcul dans les deux cas principaux qui ont été traités dans le paragraphe III, savoir : quand le support est formé par des poteaux susceptibles de se déverser facilement d'un côté et de l'autre, et quand la chaîne repose sur un pilier fixe.

On a vu, article 125, qu'il existait, dans le premier cas, entre la tension R qu'éprouve la chaîne de retenue AN (fig. 13, pl. XI) à l'extrémité supérieure, et la composante horizontale Q des chaînes de support, la relation $R = \frac{Q}{\cos. \omega}$, ω désignant l'angle

PAN. En nommant toujours a la distance AP, la longueur de la chaîne de retenue différera extrêmement peu de $\frac{a}{\cos.\,\omega}$; et si nous désignons, comme ci-dessus, par E le poids nécessaire pour produire, dans une partie quelconque de la chaîne, un allongement égal à la longueur de cette partie (poids dont l'expression est donnée article 176), nous aurons d'abord

$$\frac{R}{E}\,\frac{a}{\cos.\,\omega}, \text{ ou } \frac{Q}{E}\,\frac{a}{\cos.^2\,\omega}, \qquad (10)$$

pour représenter la quantité dont la chaîne de retenue s'est allongée par suite de la tension R.

182. Nous regardons ici les tensions R ou Q comme ayant des valeurs correspondantes à la valeur du poids de la construction pour une unité de longueur du plancher, poids que nous désignons par p. Si l'on suppose sur chaque unité de longueur une surcharge ϖ, les tensions R et Q augmenteront dans le rapport de 1 à $\frac{p+\varpi}{p}$. Par conséquent, l'effet de cette surcharge sera d'augmenter encore la longueur de la chaîne de retenue de la quantité

$$\frac{R\varpi}{Ep}\,\frac{a}{\cos.\,\omega}, \text{ ou } \frac{Q\varpi}{Ep}\,\frac{a}{\cos.^2\,\omega}; \qquad (11)$$

et comme nous supposons l'extrémité supérieure des supports libre de se déplacer par suite de cet allongement, en cédant à l'action des chaînes qui soutiennent le plancher, cette extrémité éprouvera un déplacement dans le sens horizontal, dont on aura la valeur en divisant la formule (11) par $\cos.\,\omega$, et qui sera par conséquent

$$\frac{R\varpi}{Ep}\,\frac{a}{\cos.^2\,\omega}, \text{ ou } \frac{Q\varpi}{Ep}\,\frac{a}{\cos.^3\,\omega}. \qquad (12)$$

Ce déplacement devra être ajouté à celui représenté par la formule (20), art. 138, et qui correspond au redressement de la chaîne causé par l'excès de tension dû à la surcharge ϖ.

183. Un semblable déplacement dans l'extrémité supérieure des poteaux diminue un peu la demi-corde h de la courbe des chaînes de support. Représentons généralement par n une diminution très-petite survenue dans la quantité h : on trouve facilement, au moyen de l'équation (23), article 115, en se bornant aux premiers termes de la série, qu'en vertu de cette diminution, la demi-longueur c de cette courbe étant supposée invariable, la flèche f augmente de la quantité

$$\frac{3c}{4f}\,n. \qquad (13)$$

Il faudra donc, dans le calcul de l'abaissement produit au milieu du plancher d'un pont

par la surcharge ϖ, si l'on veut tenir compte de l'allongement et du redressement des chaînes de retenue, ajouter à la valeur de la formule (5), art. 175, la valeur donnée par la formule précédente (13), en y mettant pour n la somme des valeurs données par la formule (12), article 182, et par la formule (20), article 138.

184. Considérons maintenant le cas où la chaîne repose sur un pilier fixe. En faisant abstraction du frottement qui tend à empêcher le glissement de cette chaîne, la tension R qu'elle supportera ne différera point de la tension qui a lieu à l'extrémité supérieure de la chaîne de support ; tension représentée par $\frac{Q}{\cos. \alpha}$, en désignant toujours par α l'angle que la chaîne de support forme à cette extrémité avec l'horizon. Ainsi, par l'effet du poids de la construction, les chaînes de retenue s'allongent d'abord de la quantité

$$\frac{Q}{E} \frac{a}{\cos. \alpha . \cos. \omega}; \qquad (14)$$

en prenant pour Q la valeur de la tension horizontale qui répond à ce poids.

185. De plus, si, sur chaque unité de longueur de la construction, dont le poids est p, se trouve placée une surcharge ϖ, les chaînes de retenue s'allongeront encore, par l'effet de cette surcharge, de la quantité

$$\frac{Q\varpi}{Ep} \frac{a}{\cos. \alpha . \cos. \omega}, \qquad (15)$$

quantité qui doit être ajoutée à l'allongement provenant du redressement de ces chaînes, représenté par la formule (19), article 138.

186. L'effet de cet allongement est ici de permettre à la chaîne de glisser sur le sommet du support : par conséquent, la demi-longueur c des chaînes de support augmentera d'une quantité représentée par la somme de la formule précédente (15) et de la formule (19), article 138. Si l'on nomme γ cette augmentation, on a déjà vu, article 175, qu'il en résultera, dans la flèche f de la courbure des chaînes, un accroissement exprimé par

$$\frac{3h}{4f} \gamma : \qquad (16)$$

cette expression, ajoutée à la valeur de la formule (5), article 175, donnera donc, dans le cas dont il s'agit, l'abaissement total qui aura lieu au milieu du plancher du pont par l'effet de l'allongement des chaînes de support et de l'allongement et du redressement des chaînes de retenue, causés par la surcharge ϖ dans chaque unité de longueur de ce plancher.

§. VIII.

De l'emploi du bois pour la construction des chaînes destinées à soutenir le plancher des ponts.

187. Le bois tiré dans le sens de la longueur est employé avec avantage dans les grandes constructions. Il est vraisemblable qu'un arc en bois, dont les pièces seraient tendues, se détériorerait moins rapidement que ne le font les arcs dont les pièces sont comprimées, parce que le bois, s'accourcissant par l'effet seul du desséchement progressif, cède naturellement à la compression, tandis qu'il résisterait au contraire à une action qui tendrait à l'allonger.

Les expériences sur la résistance des bois ont fait connaître la force nécessaire pour rompre le chêne et le sapin, sollicités dans le sens de la longueur des pièces. Il résulte des observations de M. Barlow (*), qu'il faut un effort de $8^{k},4$ sur chaque millimètre carré de la section transversale pour rompre le sapin, et de 7 kilogrammes pour rompre le chêne. M. Rondelet (**) a trouvé pour la résistance du chêne $9^{k},8$ par millimètre carré de la section transversale. On peut donc considérer 8 kilogrammes par millimètre carré comme la valeur moyenne de la résistance absolue du chêne et du sapin, en sorte que cette résistance est le cinquième de celle du fer forgé.

188. On a vu dans le paragraphe précédent que les dimensions des chaînes en fer devaient être réglées par la condition que la plus grande tension à laquelle elles soient exposées surpasse peu le tiers de celle qui serait nécessaire pour rompre ces chaînes. En adoptant cette règle, on n'a point à craindre que l'élasticité naturelle du fer soit jamais altérée, et l'on est assuré que les allongemens produits par des surcharges accidentelles ne subsisteront plus quand l'action de ces surcharges aura cessé, le fer revenant toujours aux dimensions qu'il a prises sous l'action de la charge permanente du plancher. Les expériences connues sur la résistance des bois n'offrent pas les élémens nécessaires pour fixer ainsi la limite des charges qu'on peut faire supporter aux pièces sans en altérer la force d'élasticité. Nous supposerons qu'on peut prendre pour cette limite le cinquième de la force qui opérerait la rupture, hypothèse qui ne peut être fort éloignée de la vérité, et qui suffit pour la comparaison dont il s'agit.

189. D'après cette hypothèse, les aires des sections transversales des pièces en bois et en fer qui se trouveraient exposées à une même tension, devront être entre elles

(*) *An Essay on the strength and stress of timber*, page 80.
(**) *Art de bâtir*, tome IV, page 66.

dans le rapport de $\frac{1}{3}$ à $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}$, ou de 8 à 1 environ. Et comme le fer, à volume égal, coûte environ soixante fois autant que le bois, on voit que l'emploi du bois à la construction des chaînes serait sept à huit fois plus économique que celui du fer. Les chaînes en bois, à force égale, ne peseraient d'ailleurs pas plus que celles en fer, si l'on employait du bois de chêne, et elles seraient plus légères si l'on employait du sapin.

190. L'économie considérable résultant de l'emploi du bois pourrait le faire préférer dans quelques circonstances; mais on doit remarquer que des chaînes faites avec cette matière seraient plus susceptibles que celles en fer de s'allonger sous les surcharges accidentelles que le plancher du pont doit recevoir. En effet, il résulte des expériences sur la flexion du sapin, qu'une verge de cette matière s'allonge environ vingt fois plus sous la même tension que ne le ferait une verge en fer forgé des mêmes dimensions. La section transversale des chaînes en sapin étant huit fois plus grande que celle des chaînes en fer, on voit que les premières sont exposées à s'allonger plus que les secondes dans le rapport de $\frac{20}{8}$ à 1 ou de 5 à 2. La résistance du chêne à l'extension est à peu près égale à une fois et demie celle du sapin; en sorte qu'il s'allongerait plus que le fer dans le rapport de 5 à 3. On pourrait craindre, d'après cette remarque, que les ponts suspendus dont les chaînes seraient faites en bois, s'ils avaient une ouverture considérable, ne fussent exposés à des oscillations verticales qui en rendraient le passage incommode; en sorte que l'usage du bois employé de cette manière sera probablement toujours restreint à des travées de faibles dimensions.

§. IX.

Des effets des variations de la température dans les ponts suspendus.

191. La connaissance des effets dont il s'agit est fondée sur celle de la dilatation qu'éprouvent les matériaux par l'action de la chaleur, et la dilatation du fer forgé est celle qu'il importe le plus de connaître avec exactitude. La quantité dont une verge de fer s'allonge pour une élévation de température de 100° du thermomètre centigrade, est

D'après les expériences de Smeaton (*).................... 0,001 258;
D'après celles de MM. de Laplace et Lavoisier (**).......... 0,001 220;
D'après celles de MM. Dulong et Petit (***).............. 0,001 182.

(*) *The miscellaneous Papers*, page 149.

(**) M. Biot, *Traité de physique expérimentale et mathématique*, tome I, pag. 158.

(***) *Journal de l'école polytechnique*, tome XI, page 221. Les auteurs donnent pour la dilatation en volume du fer, de 0° à 100° $\frac{1}{282}$. Le nombre inscrit dans le texte est le tiers de celui-ci, la dilatation linéaire étant, comme l'on sait, à très-peu près égale au tiers de la dilatation cubique.

La variation de longueur correspondante à une variation de température de 1° du même thermomètre peut donc être évaluée moyennement à 0,000 012 2. Ainsi, dans un lieu où la variation de température, de l'hiver à l'été, pourrait s'élever à 50°, la longueur d'une chaîne en fer pourrait varier de 0,000 61 de cette longueur, c'est-à-dire, de $0^m,061$ pour 100 mètres.

Nous joignons ici une table contenant les résultats des expériences faites par divers physiciens, et indiquant la dilatation linéaire de plusieurs substances, pour un intervalle de 100° (*).

Fer fondu	0,001 11.
Fer forgé	0,001 22.
Acier	0,001 14.
Cuivre jaune	0,001 88.
Cuivre rouge	0,001 71.
Étain	0,002 22.
Plomb	0,002 84.
Zinc	0,002 94.
Verre, moyennement	0,000 85.
Poterie brune, environ	0,000 40.
Bois de sapin, environ	0,000 80.

192. En recherchant d'ailleurs quels sont les effets des variations de la température sur les ponts suspendus, on doit sans doute regarder comme absolument fixes les sommets des culées et des piles où aboutissent les extrémités des planchers, ainsi que les constructions placées aux endroits où les chaînes pénètrent dans le sol. Il ne peut y avoir non plus d'erreur sensible à regarder comme invariables la température, et par conséquent les dimensions des parties des chaînes qui se trouvent au-dessous du sol. Cela posé, on peut considérer séparément ces effets sur les supports des chaînes, sur les chaînes elles-mêmes, et sur les planchers.

L'effet de la dilatation produite par la chaleur sur les supports sera d'en augmenter la hauteur : s'ils sont construits en pierre, cette augmentation ne pourra être calculée avec exactitude, parce qu'on n'a pas encore soumis à l'expérience les lois de la dilatation de cette matière ; mais on peut présumer que la valeur de cette dilatation est moindre que toutes celles comprises dans le tableau précédent. Si les supports sont construits en bois, ou bien en fer fondu ou forgé, ce tableau offrira les élémens nécessaires

(*) *Voyez* le tome I des *Annales de chimie et physique*, 1816, où l'on trouve rassemblés la plupart des résultats obtenus sur la dilatation des corps. On en trouve encore quelques autres dans les Mémoires de Borda, insérés dans le tome III de la *Base du système métrique.* La dilatation du fer pour un fil tiré à la filière est, suivant Borda, de 0,001 14 dans l'intervalle de 0° à 100°.

pour se rendre compte des variations de hauteur correspondantes aux variations de la température.

Quant à l'action de la chaleur sur les chaînes, en allongeant d'abord les portions comprises entre les supports, elle augmentera un peu la flèche de la courbure, et par conséquent produira un petit abaissement de tous les points du plancher : cet abaissement, nul pour les points extrêmes qui s'appuient sur les sommets des culées, augmentera depuis ces points jusqu'au milieu du plancher. De plus, la chaleur allonge la partie des chaînes de retenue comprise entre l'extrémité supérieure des supports et le niveau du sol, et cette circonstance mérite un examen spécial.

193. Les diverses manières dont les chaînes peuvent être supportées, et les conditions de l'équilibre qui s'établit au sommet des appuis, ont été exposées dans le paragraphe III. On doit distinguer à cet égard deux cas principaux : celui où les chaînes sont attachées fixement à l'extrémité de supports mobiles ou flexibles, que l'on regarde comme susceptibles de se déverser facilement d'un côté ou de l'autre; et celui où ces chaînes reposent sur une courbe d'appui faisant partie d'un support fixe. Examinons d'abord le premier cas. Soit AB (fig. 8, pl. XI) le support vertical, AM la direction de la chaîne qui supporte le plancher, et AN celle de la chaîne de retenue qui pénètre en N dans le sol. Les points B et N étant supposés fixes, on doit regarder, dans le triangle ABN, les côtés AB et AN comme seuls susceptibles de s'allonger par l'effet de la chaleur. Nommons β l'accroissement de longueur que peut éprouver le support AB pour une élévation donnée de la température, et ρ l'allongement qu'éprouverait la chaîne AN par l'effet de la même variation, les quantités β et ρ étant calculées au moyen des résultats d'expérience rapportés ci-dessus. A raison de la petitesse de ces allongemens, on peut supposer que le point A se déplacerait horizontalement, si AN s'allongeait seul, et se déplacerait perpendiculairement à AN, si AB s'allongeait seul. D'après cela, on trouve facilement que, par l'effet des allongemens simultanés de ces deux lignes, le point A s'élève verticalement de la quantité β, et se déplace horizontalement de la quantité $\frac{\rho}{\cos.\omega} - \beta \operatorname{tang.} \omega$, en représentant, comme dans le paragraphe III, par ω l'angle de AN avec l'horizon. Ainsi l'effet d'une élévation de température sur les chaînes de retenue et sur les supports est de diminuer la demi-corde de la courbe des chaînes, dont la valeur a été désignée dans les paragraphes précédens par h, d'une quantité que nous nommerons n, et dont l'expression est

$$n = \frac{\rho}{\cos.\omega} - \beta \operatorname{tang.} \omega; \qquad (1)$$

en même temps que la hauteur des supports sur lesquels les chaînes reposent est augmentée de la quantité β. Ces supports étant supposés libres de fléchir, ou de se deverser

d'un côté ou de l'autre, les extrémités supérieures oscilleront, lors des variations de la température, dans une étendue très-petite, que l'on pourra calculer au moyen de la formule précédente.

194. Quant à l'action de la chaleur sur les chaînes auxquelles le plancher est suspendu, nous représenterons par γ l'accroissement qu'éprouve la demi-longueur c de ces chaînes, en même temps que le support AB s'élève de la quantité ζ, et que la chaîne de retenue s'allonge de la quantité ρ. Pour connaître l'abaissement du plancher, il faut évaluer la variation qu'éprouvera la flèche de courbure f, par suite des changemens simultanés dont il s'agit. La petitesse de ces changemens permet de supposer que les variations de f correspondantes aux variations n et γ de h et c sont exprimées respectivement par $\frac{df}{dh}n$ et $\frac{df}{dc}\gamma$, en sorte que la variation totale est $\frac{df}{dh}n + \frac{df}{dc}\gamma$. Si l'on différencie l'équation (23), article 115, en y regardant successivement h et c comme des variables indépendantes, et en se bornant aux premiers termes des séries, ce qui suffira presque toujours dans les applications, on trouve $\frac{df}{dh} = -\frac{3c}{4f}$, et $\frac{df}{dc} = \frac{3h}{4f}$. L'accroissement de la flèche f, par suite de l'élévation de la température, sera donc, à fort peu près, en observant que n doit être pris négativement, puisque h diminue,

$$\frac{3h}{4f}\gamma + \frac{3c}{4f}n;$$

et cette formule représenterait aussi la quantité dont le milieu du plancher s'est abaissé, si l'extrémité supérieure des supports était demeurée fixe. Mais comme cette extrémité s'est élevée de la quantité ζ, l'abaissement du milieu du plancher est seulement $\frac{3h}{4f}\gamma + \frac{3c}{4f}n - \zeta$, ou, en mettant pour n la valeur (1),

$$\frac{3h}{4f}\gamma + \frac{3c}{4f\cos.\omega}\rho - \left(\frac{3c\,\text{tang.}\,\omega}{4f} + 1\right)\zeta; \qquad (2)$$

formule au moyen de laquelle cet abaissement se trouve exprimé en fonction des trois variations γ, ρ et ζ des longueurs des chaînes de support, des chaînes de retenue et des supports. Il est inutile d'ajouter que s'il s'agissait d'un abaissement de température, la même formule exprimerait l'élévation qui en résulterait dans le milieu du plancher, en donnant un signe contraire à ces trois variations. Dans des ponts de diverses grandeurs, où les courbures des chaînes offriraient des figures semblables, les variations γ, ρ et ζ seraient toujours, pour un changement donné de température, proportionnelles à l'ouverture des arches. On conclut donc de la formule précédente que la quantité dont le milieu du plancher s'abaissera ou s'élevera, sera aussi proportionnelle à cette ouverture. La valeur absolue de cette quantité est d'autant plus grande que la flèche est plus petite.

195. Passons maintenant au second des deux cas indiqués article 193; c'est-à-dire, supposons les chaînes placées sur un support fixe. Quel que soit l'état de la température, comme le poids du plancher agit toujours sur la chaîne, cette chaîne doit demeurer constamment tendue dans toutes les parties. Par conséquent, lorsque la chaîne de retenue CN (fig. 10, pl. XI) s'allonge par l'action de la chaleur, il est nécessaire qu'une petite portion de cette chaîne glisse dans le sens CA sur la courbe d'appui. Quand au contraire la température s'abaisse, ce qui tend à accourcir la chaine de retenue CN, une petite portion de chaîne glisse dans le sens AC. On peut remarquer à ce sujet que l'élévation de la température, en même temps qu'elle détendrait la chaîne de retenue CN, si le glissement dont il vient d'être question n'avoit pas lieu, rendrait nulle la pression que la chaîne exerce sur la courbe d'appui; car cette pression est le résultat de la tension de la chaîne, et disparaît avec elle. Comme la résistance du frottement devient nulle avec la pression, il paraît que le glissement, dont l'effet sera de rétablir constamment, à mesure que la température s'élevera, la tension de la chaîne CN, s'opérera sans que le frottement oppose de résistance, ou du moins cette résistance sera fort peu considérable. Ainsi, selon toute apparence, la chaîne glissera facilement dans le sens CA, lorsque l'air deviendra plus chaud, et le sommet du pilier ne sera que très-peu sollicité à se mouvoir dans ce sens. Au contraire, lorsque la température s'abaissera, ce qui accourcira la chaîne CN, la tension augmentera dans cette portion de chaîne; et comme la portion AM chargée du poids du plancher demeure toujours constamment tendue, la chaîne pressera alors la courbe d'appui, et la résistance provenant du frottement se fera sentir dans toute son intensité. La chaîne éprouvera donc beaucoup plus de difficulté à glisser dans le sens AC par l'effet du froid, qu'elle n'en éprouvera à glisser dans le sens CA par l'effet de la chaleur; et par conséquent le sommet du pilier est plutôt sollicité, par suite des variations de la température, dans le premier sens que dans le second.

L'évaluation des changemens de figure et de tension que les chaînes peuvent éprouver, diffère d'ailleurs un peu de ce qu'on a vu dans les articles précédens. On peut regarder ici les points A et C comme demeurant dans une même verticale, en sorte que la demi-corde h conserve constamment la même valeur. Représentons toujours par ρ l'allongement de la chaîne de retenue CN pour une élévation donnée de la température, par β l'augmentation de hauteur des supports, et par γ l'accroissement de la demi-longueur c des chaînes de support AM. Lorsque le point C s'est élevé de la quantité β, la distance CN a augmenté, à très-peu près, de la quantité $\beta \sin. \omega$, en représentant toujours par ω l'angle de la ligne CN avec l'horizon; par conséquent la chaîne de retenue est devenue trop longue de la quantité

$$\rho - \beta \sin. \omega, \qquad (3)$$

et la chaîne doit glisser de cette quantité dans le sens CA. Il en résulte que la longueur de chaque moitié c de la chaîne de support augmentera de

$$\gamma + \rho - \mathcal{C} \sin. \omega.$$

Par conséquent, puisque $\frac{df}{dc} = \frac{3h}{4f}$, l'accroissement de la flèche de courbure f de la chaîne de support sera exprimé par

$$\frac{3h}{4f}(\gamma + \rho - \mathcal{C} \sin. \omega).$$

Cet accroissement représenterait l'abaissement du milieu du plancher, si le point A était demeuré fixe; mais, comme ce point s'est élevé de $\mathcal{C}$, cet abaissement est seulement

$$\frac{3h}{4f}(\gamma + \rho - \mathcal{C} \sin. \omega) - \mathcal{C}. \quad (4)$$

La même formule, dans le cas d'un abaissement de la température, exprimera l'élévation du milieu du plancher, en changeant le signe des quantités γ, ρ et $\mathcal{C}$.

196. La tension de la chaîne de retenue, pendant que la température s'élève, est nécessairement plus petite que la tension de la chaîne de support AM, ou tout au plus égale à cette dernière tension; mais quand la température s'abaisse, l'accourcissement qui doit en résulter dans la chaîne de retenue ne peut s'opérer sans que la tension de cette chaîne ne surmonte à-la-fois la tension de la chaîne de support AM et l'effet du frottement sur la courbe d'appui. En recourant à l'article 130, on verra facilement que la tension de cette chaîne prend alors la valeur

$$R = \frac{Q}{\cos. \alpha} . e^{\frac{\varphi S}{\rho}},$$

φ représentant le rapport du frottement à la pression pour la chaîne glissant sur la courbe d'appui; $\frac{S}{\rho} = \pi \frac{\alpha + \omega}{180°}$, le rapport de la longueur de la courbe d'appui au rayon de cette courbe; e, le nombre 2,718 282. Cette valeur ne diffère point de la formule (16), trouvée, article 133, pour l'expression de R, lorsque le pilier, étant prêt à se renverser par l'action de la chaîne de support, doit être maintenu par la tension de la chaîne de retenue. Ainsi, quoiqu'il ait été dit, article 135, que la tension de la chaîne de retenue n'était point nécessairement exposée à atteindre la limite donnée par la formule (16), et ne pouvait jamais surpasser la valeur $\frac{Q}{\cos. \omega}$; cette proposition, vraie quand on considère la tension de la chaîne de retenue comme destinée seulement à résister à la tension de la chaîne de support, ne peut plus être admise quand on considère la première tension comme devant surmonter la seconde, et faire glisser la chaîne dans le sens

AC, circonstance qui peut avoir lieu par l'effet de l'abaissement de la température. On doit donc, en général, regarder la tension de la chaîne de retenue comme pouvant varier, suivant l'état de la température, entre les deux limites

$$\frac{Q}{\cos.\alpha} e^{-\frac{\varphi S}{\rho}} \quad \text{et} \quad \frac{Q}{\cos.\alpha} e^{\frac{\varphi S}{\rho}},$$

et donner à cette chaîne la grosseur nécessaire pour résister à l'effort exprimé par la dernière de ces limites.

La chaîne pouvant, comme on vient de l'expliquer, être dans le cas de glisser sur la courbe d'appui placée au sommet du pilier, il est convenable, pour faciliter ce mouvement, de donner à cette courbe la figure d'un arc de cercle, parce que deux arcs de cercle mis en contact peuvent, aussi bien que deux lignes droites, glisser l'un sur l'autre sans cesser de se toucher dans tous les points, et sans autre résistance que celle provenant du frottement, ce qui n'a pas lieu pour toute autre courbe. Pendant le glissement, le sommet du pilier se trouvera sollicité dans le sens CA lorsque la température s'élevera, et dans le sens AC lorsque la température s'abaissera. Il sera possible qu'au lieu de glisser sur la courbe d'appui, la chaîne oblige le pilier à fléchir un peu alternativement d'un côté ou de l'autre : cette circonstance aura lieu si la résistance provenant du frottement est plus grande que la résistance que le pilier oppose à la flexion. Les déplacemens dont il s'agit seront toujours extrêmement petits, et, de quelque manière qu'ils s'opèrent, ils ne peuvent donner aucune inquiétude sur la solidité du pilier. En effet, si le pilier est épais et massif, il ne pourra fléchir, et la chaîne glissera. Si au contraire le pilier a peu d'épaisseur, l'élasticité des matériaux dont il sera formé, en le supposant même construit en pierre, permettra, sans qu'il en résulte de dégradation, les légères flexions qui seraient nécessaires pour maintenir constamment les chaînes tendues. On n'a point à craindre d'ailleurs que le pilier, ayant commencé à fléchir, puisse continuer à se mouvoir dans le même sens, car l'effet s'arrêtera aussitôt que la chaîne sera tendue, et le déplacement opéré dans un sens sera détruit et opéré en sens contraire, lorsque l'état de la température viendra à changer: mais on voit néanmoins qu'il est nécessaire de lier les parties de ce pilier, à moins qu'il ne soit très-massif, et d'en former un corps.

La manière de faire porter les chaînes sur les supports dont il a été question article 132, se prête facilement aux effets des variations de la température; mais cet avantage ne paraît pas assez grand pour compenser les inconvéniens que cette disposition présente d'ailleurs.

197. Nous avons supposé dans tout ce qui précède, les chaînes de retenue dirigées en ligne droite, et nous avons fait abstraction de l'extensibilité du fer. Il est utile

de remarquer que l'effet de cette extensibilité et de la courbure très-petite, mais inévitable, de ces chaînes, est de compenser en partie, dans le cas où les chaînes reposent sur un pilier fixe, les effets des dilatations et contractions provenant des variations de la température. Supposons que, le pont ayant été mis en place, on ait réglé la tension de la chaîne de retenue de manière qu'elle soit égale à celle des chaînes de support. Si la température s'élève, la tension, conformément à ce qui vient d'être dit, diminuera dans la chaîne de reteuue, et pourra devenir plus petite qu'elle n'était dans le rapport de 1 à $e^{-\frac{\varphi S}{\rho}}$. Par l'effet de cette diminution de la tension, la distance des deux extrémités de la chaîne de retenue diminuera également, 1.° parce que cette chaîne pourra prendre alors une courbure plus grande; 2.° parce que le fer, étant moins tendu, se contractera. On pourra se rendre compte de la quantité dont cette distance aura diminué, en observant qu'en appelant Q la tension horizontale primitive de la chaîne, et faisant $Q' = Q . e^{-\frac{\varphi S}{\rho}}$, on a d'abord, par l'article 137,

$$\frac{\sigma^2 a^3 \cos.\omega}{24}\left(\frac{1}{Q'^2} - \frac{1}{Q^2}\right)$$

pour la diminution de longueur provenant de l'accroissement de la courbure de la chaîne; puis, par l'article 181,

$$\frac{a}{E \cos.^2 \omega}(Q - Q')$$

pour la diminution de longueur provenant de la contraction du fer. La diminution totale sera donc

$$\frac{\sigma^2 a^3 \cos.\omega}{24}\left(\frac{1}{Q'^2} - \frac{1}{Q^2}\right) + \frac{a}{E \cos.^2 \omega}(Q - Q'). \qquad (5)$$

Cette diminution compensera en partie l'augmentation de la longueur de la chaîne produite par l'élévation de la température, et il faudra, dans les formules de l'article 195, retrancher de la quantité représentée par ρ, la valeur de la formule (5).

Si au contraire, après que la tension des chaînes de retenue a été rendue égale à celle des chaînes de support, la température vient à baisser, la tension pourra augmenter dans les premières dans le rapport de 1 à $e^{\frac{\varphi S}{\rho}}$. L'effet de cette tension étant de redresser ces chaînes et d'allonger les fers dont elles sont formées, la distance des extrémités, en faisant $Q'' = Q\, e^{\frac{\varphi S}{\rho}}$, augmentera de la quantité

$$\frac{\sigma^2 a^3 \cos.\omega}{24}\left(\frac{1}{Q^2} - \frac{1}{Q''^2}\right) + \frac{a}{E \cos.^2 \omega}(Q'' - Q), \qquad (6)$$

qui viendra en compensation de la diminution de longueur ρ produite par l'abaissement de la température.

Il est aisé de concevoir d'après ces remarques, en ayant égard à l'action du frottement de la chaîne sur la courbe d'appui, qu'en vertu de la compensation qui tend à s'établir entre les changemens de longueur provenant des variations de la température, et ceux provenant des variations dans la tension causées par la disposition de la chaîne à glisser tantôt dans un sens et tantôt dans l'autre, il n'y aura point de glissement, à moins qu'à partir de la température à laquelle l'établissement du pont s'est fait, il ne survienne une variation telle, que l'allongement ou l'accourcissement ρ qui en résultera dans les chaînes de retenue, surpasse les valeurs des quantités représentées par les formules (5) ou (6). On pourra s'assurer d'ailleurs, en appliquant ces résultats à des cas particuliers, qu'en général les déplacemens des points d'appui de la chaîne causés par les variations de la température seront extrêmement petits.

198. Il reste à considérer les effets de ces variations sur les planchers. Si l'on a employé dans la construction des planchers des pièces continues dans le sens de la longueur du pont, et fixées par les extrémités à la maçonnerie des culées, il sera nécessaire de composer ces pièces de parties réunies par des assemblages qui laissent un peu de jeu, de manière que les parties contiguës puissent glisser les unes sur les autres, lorsque la chaleur les allongera. Cette précaution serait plus nécessaire encore si le plancher n'était pas horizontal, mais formé suivant une courbe tournant la convexité en haut; car la flèche de la courbe du plancher diminuant lorsque la chaleur allonge les chaînes de support, la longueur de cette courbe diminuerait en même temps que les parties dont elle est formée acquerraient de plus grandes dimensions.

199. On a remarqué, depuis long-temps, que le fer devient cassant lors des changemens brusques de la température atmosphérique. Ce phénomène peut s'expliquer en observant qu'un refroidissement subit survenu dans l'air ne pénètre que lentement dans l'intérieur des corps solides. Les parties voisines de la surface ont été refroidies et tendent à se contracter en conséquence, tandis que les parties intérieures conservent encore la température primitive. On peut donc regarder alors une pièce de fer comme composée d'une enveloppe qui n'aurait pas un volume suffisant pour contenir les parties intérieures, et qui, par cette raison, se trouverait fortement tendue. Un effet inverse a lieu lorsque la température de l'air s'élève subitement : l'enveloppe tend alors à se dilater avant que les parties intérieures ne puissent éprouver le même changement, et cette enveloppe se trouve fortement contractée. On conçoit ainsi qu'un effort exercé dans le sens de la longueur d'une barre, à une époque où les couches voisines de la surface sont étendues par la chaleur, n'est plus supporté que par les couches intérieures; et au contraire, qu'à l'époque où les couches voisines de la surface sont

contractées par le froid, l'effort est supporté tout entier par l'enveloppe extérieure de la barre. Il résulte donc d'un changement brusque dans la température du milieu, que les pièces ne résistent plus avec la surface entière de la section transversale, et par conséquent sont plus sujettes à casser. On donnera toujours aux pièces, dans la construction d'un pont, des dimensions plus considérables qu'il ne serait nécessaire, eu égard aux efforts auxquels elles sont communément exposées ; le fer est d'ailleurs susceptible de s'étendre beaucoup sous un effort qui ne pourrait en causer la rupture: ainsi on ne peut guère avoir à craindre des accidens provenant de la cause dont il s'agit. Si toutefois l'expérience prouvait le contraire, on les préviendrait facilement en interdisant le passage du pont pendant quelques heures, après un changement considédérable et subit dans la température, circonstance qui se présente rarement.

§. X.

Des oscillations verticales des ponts suspendus, en supposant les chaînes parfaitement flexibles et inextensibles.

200. Les oscillations verticales auxquelles les constructions de ce genre sont exposées, ne peuvent provenir que du mouvement des hommes, des animaux, et surtout des voitures. Une voiture qui se transporte d'une extrémité à l'autre d'un pont modifie continuellement la figure des chaînes et du plancher, conformément aux lois établies dans le paragraphe II. Outre cette modification, dont la considération appartient à la statique, et qui provient uniquement de ce que l'équilibre des chaînes comporte une figure différente pour une distribution différente de la charge, cette voiture, soulevée par les petits obstacles qu'elle rencontre, frappe en retombant le plancher, et lui imprime des mouvemens oscillatoires dont il faut aussi connaître les lois.

Nous admettrons qu'un fil flexible et inextensible, attaché aux deux points fixes A, B (fig. 23, pl. XI), situés sur une même ligne horizontale, est chargé dans tous les points de poids distribués uniformément sur la ligne AB, p représentant le poids placé sur l'unité de longueur de cette ligne; nous supposerons de plus qu'un poids additionnel Π a été placé au milieu M de la longueur de ce fil. Le système étant supposé en équilibre, nous rechercherons les lois des oscillations des points du fil, en supposant que ces points ne sortent pas du plan vertical où ils se trouvent placés. Le poids Π est censé représenter le poids d'une voiture qui se trouverait au milieu de la longueur du plancher d'un pont. Si, en se transportant le long du plancher, cette voiture surmonte un obstacle, elle retombe après avoir acquis une vîtesse qui dépend de la hauteur de la chute. Cette vîtesse est transmise au point sur lequel tombe la

voiture, et pendant les oscillations qui résultent de ce choc, la voiture demeure en contact avec le plancher. Un nouveau choc reproduit les mêmes effets, qui s'ajoutent à ceux produits par le premier. On imitera ces effets aussi bien qu'il est possible, en admettant que, dans le système décrit ci dessus, une vîtesse verticale donnée est imprimée au poids Π, et produit les mouvemens de ce système. Nous supposons à la vérité le plancher, et les chaînes elles-mêmes, parfaitement flexibles; mais, par la nature de la construction, la résistance opposée à la flexion est effectivement, en général, très-faible. Il ne s'agit pas d'ailleurs ici d'apprécier exactement l'effet absolu produit par les chocs des voitures, mais plutôt de reconnaître suivant quelles lois ces effets dépendent des dimensions et de la figure des constructions; en sorte qu'après les avoir observés dans les ponts exécutés, on puisse prévoir ce qu'ils seront dans d'autres cas.

201. Considérons un point quelconque m de la courbe, dont les cordonnées Ap et pm sont représentées par x et y; et l'élément mn placé à la suite de ce point, dont la longueur est ds, et dont la projection sur l'axe des x est dx. L'élément mn est chargé du poids pdx, et quand le système est en repos, il y a nécessairement équilibre entre l'action de ce poids et les deux tensions qui agissent en sens opposés aux extrémités m et n de l'élément. La tension, dans tous les points de la courbe, a pour composante horizontale la force constante Q', comme on l'a remarqué article 95. Nous affectons ici d'un accent la lettre Q, comme nous l'avons fait dans le paragraphe II, pour distinguer la tension horizontale qui s'établit dans la courbe lorsquelle est chargée du poids additionnel Π, de celle qui est due seulement à la charge $2ph$ répartie uniformément dans l'intervalle AB. La composante verticale de la tension agissant sur le point m sera donc $Q'\frac{dy}{dx}$, tandis que la composante verticale de la tension agissant sur le point n sera $Q'\frac{dy+d^2y}{dx}$. Ainsi l'élément mn se trouve sollicité par deux forces horizontales égales et opposées, qui se détruisent mutuellement; par la force verticale $Q'\frac{dy}{dx}$, agissant de bas en haut, et par les forces verticales pdx et $Q'\frac{dy+d^2y}{dx}$, agissant de haut en bas. L'équilibre de cet élément exige donc que l'on ait l'équation $Q'\frac{dy}{dx}=pdx+Q'\frac{dy+d^2y}{dx}$, ou

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{p}{Q'}; \qquad (1)$$

et on peut vérifier que, cette équation, donnée par la considération de l'équilibre de translation, étant satisfaite, l'équilibre de rotation est également assuré. Nous aurions pu l'obtenir par la différenciation de l'équation (1), article 109 : elle exprime l'existence de l'équilibre dans la courbe.

202. Outre cette équation, qui appartient à tous les points de la courbe, il en existe une autre particulière au point M. Il est nécessaire, comme on a déjà eu occasion de le remarquer, article 119, que les tensions des deux élémens extrêmes des parties de la courbe séparés par ce point fassent équilibre au poids Π. Ces tensions ont pour composante verticale $Q'\frac{dy}{dx}$: on doit donc avoir, lorsque $x = AC$ ou h, l'équation $2Q'\frac{dy}{dx} = \Pi$, ou

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\Pi}{2Q'}. \qquad (2)$$

203. Pour intégrer ces deux équations, soit

$$y = Ax + Bx^2,$$

A, B, étant des constantes arbitraires. En substituant cette expression dans l'équation (1), qui doit subsister pour toutes les valeurs de x, et dans l'équation (2), qui doit subsister pour la valeur $x = h$ seulement, on trouve

$$A = \frac{2ph + \Pi}{2Q'}, \quad B = -\frac{p}{2Q'}.$$

L'équation qui donne la figure de chaque moitié de la courbe, dans l'état d'équilibre, est donc

$$y = \frac{2ph + \Pi}{2Q'}x - \frac{p}{2Q'}x^2. \qquad (3)$$

Ce résultat s'accorde avec ceux qui ont été trouvés d'une autre manière dans le paragraphe II. En nommant, comme dans ce paragraphe, f' la flèche CM, l'équation précédente doit donner $y = f'$ quand $x = h$. On a donc $f' = \frac{ph^2 + \Pi h}{2Q'}$, équation qui ne diffère pas de l'équation (9), article 121. L'équation (13), article 123, donne la valeur de Q' en fonction de la valeur f que prend la flèche de la courbe, lorsque cette courbe n'est point chargée du poids Π. Cette valeur doit être substituée dans l'équation (3), où il ne restera rien d'inconnu.

204. Supposons maintenant le point m déplacé très-peu de la situation qu'il occupe dans l'état d'équilibre du système, et dans laquelle ce point tend toujours à revenir. Soient x', y' les coordonnées du point m' dans lequel le point m se trouve placé à la fin du temps t. La masse du poids dont est chargé l'élément mn est $\frac{pdx}{g}$, g représentant la vîtesse que la gravité imprime aux corps pesans pendant l'unité de temps. Par conséquent, si l'on regarde le mouvement de l'élément placé au point m comme étant décomposé en deux autres mouvemens parallèles aux x et aux y, on aura, pour représenter respectivement les forces accélératrices auxquelles ces mouvemens seraient dus,

$\frac{pdx}{g} \cdot \frac{d^2x'}{dt^2}$ et $\frac{pdx}{g} \cdot \frac{d^2y'}{dt^2}$. Il s'agit à présent de trouver les valeurs de ces forces. Pour y parvenir, nous supposerons, comme tous les géomètres qui ont traité la question des cordes vibrantes, qu'à raison de la petitesse des déplacemens des points de la courbe, la tension T' qui a lieu au point m conserve pendant toute la durée du mouvement la même valeur qu'elle avait dans l'état d'équilibre. Cette supposition admise, et remarquant qu'à raison de l'inextensibilité supposée de la courbe, la longueur ds de l'élément mn ne change point quand cet élément se transporte en $m'n'$, on voit qu'à l'instant où le point m est situé en m', les composantes horizontales et verticales de la tension qui a lieu en ce point sont respectivement $T'\frac{dx'}{ds}$ et $T'\frac{dy'}{ds}$; ou bien $\left(\text{parce que } Q' = T'\frac{dx}{ds}\right)$ $Q'\frac{dx'}{dx}$ et $Q'\frac{dy'}{dx}$. Les composantes horizontales et verticales de la tension, à l'autre extrémité n' de l'élément, seront également $Q'\frac{dx'+d^2x'}{dx}$ et $Q'\frac{dy'+d^2y'}{dx}$. Ainsi cet élément est sollicité par les forces horizontales opposées $Q'\frac{dx'}{dx}$ et $Q'\frac{dx'+d^2x'}{dx}$; par la force verticale $Q'\frac{dy'}{dx}$, agissant de bas en haut; et par les forces verticales pdx et $Q'\frac{dy'+d^2y'}{dx}$, agissant de haut en bas. Les résultantes des forces horizontales et des forces verticales devant être respectivement égales aux forces accélératrices auxquelles sont dus les mouvemens horizontal et vertical de l'élément, les équations de ces mouvemens sont donc

$$\frac{pdx}{g} \cdot \frac{d^2x'}{dt^2} = Q'\frac{d^2x'}{dx}, \text{ et } \frac{pdx}{g} \cdot \frac{d^2y'}{dt^2} = pdx + Q'\frac{d^2y'}{dx};$$

ou bien

$$\frac{p}{gQ'} \cdot \frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dx^2}, \text{ et } \frac{p}{gQ'} \cdot \frac{d^2y'}{dt^2} = \frac{p}{Q'} + \frac{d^2y'}{dx^2}.$$

205. Outre les deux équations précédentes, qui appartiennent à tous les points de la courbe et qui contiennent les lois des oscillations horizontales et verticales de ces points, il y a des équations particulières pour le point M où le poids Π est placé. Pour distinguer les quantités appartenant aux parties de la courbe placées à gauche et à droite de ce point, nous marquerons les dernières d'un accent inférieur; en sorte que, les coordonnées d'un point de cette portion de courbe dans l'état d'équilibre étant exprimées par $x_,$ et $y_,$, les mêmes coordonnés dans l'état de mouvement le seront par $x_,'$ et $y_,'$. Par suite de la tension de la courbe, le point M sera sollicité par les forces horizontales $T'\frac{dx'}{ds'}$, $T_,\frac{dx'_,}{ds'_,}$, ou (en observant que $ds' = ds$, $ds_,' = ds_,$, et que $T' = Q'\frac{ds}{dx}$, $T' = Q'\frac{ds_,}{dx_,}$) par les forces horizontales $Q'\frac{dx'}{dx}$, $Q'\frac{dx'_,}{dx_,}$. La différence de ces deux forces, ou $Q'\left(\frac{dx'}{dx} - \frac{dx'_,}{dx_,}\right)$, est la force qui tend à éloigner dans le sens

horizontal le point M de la situation actuelle de ce point. Dans le sens vertical, le point M est sollicité par les forces $T'\frac{dy'}{ds'}$, $T_{,}\frac{dy'_{,}}{ds'_{,}}$, ou $Q'\frac{dy'}{dx}$, $Q'\frac{dy'_{,}}{dx_{,}}$, qui agissent de bas en haut, tandis que le poids Π agit de haut en bas sur ce même point. La masse du poids Π étant $\frac{\Pi}{g}$, on a donc, pour les deux équations du mouvement du point M,

$$\frac{\Pi}{g}\cdot\frac{d^2x'}{dt^2}=Q'\left(\frac{dx'}{dx}-\frac{dx'_{,}}{dx_{,}}\right),\ \text{et}\ \frac{\Pi}{g}\cdot\frac{d^2y'}{dt^2}=\Pi-Q'\left(\frac{dy'}{dx}+\frac{dy'_{,}}{dx_{,}}\right),$$

ou bien

$$\frac{\Pi}{gQ'}\cdot\frac{d^2x'}{dt^2}=\frac{dx'}{dx}-\frac{dx'_{,}}{dx_{,}},\ \text{et}\ \frac{\Pi}{gQ'}\cdot\frac{d^2y'}{dt^2}=\frac{\Pi}{Q'}-\frac{dy'}{dx}-\frac{dy'_{,}}{dx_{,}}.$$

Ainsi il faut que les expressions de x' et y' en x et t qui donneraient les lois des mouvemens de la portion de courbe AM, et les expressions de $x'_{,}$ et $y'_{,}$ en $x_{,}$ et t qui donneraient les lois des mouvemens de la portion de courbe BM, satisfassent à ces dernières équations, quand on donnera dans ces expressions à x ou $x_{,}$ la valeur AC ou h.

Nous supposerons dans la suite les mouvemens imprimés au système tels que le point M ne se déplace pas horizontalement, et que les parties AM, BM de la courbe exécutent les mêmes mouvemens, en offrant à chaque instant des figures symétriques. Alors on ne doit pas tenir compte de la première des équations précédentes, qui se réduit à $0=0$; et la seconde devient

$$\frac{\Pi}{gQ'}\cdot\frac{d^2y'}{dt^2}=\frac{\Pi}{Q'}-2\frac{dy'}{dx}.$$

206. Les équations différentielles auxquelles nous venons de parvenir, peuvent être intégrées à l'aide des procédés employés par M. Fourier dans diverses questions de la *Théorie de la chaleur*, et qui offrent des ressources précieuses pour la solution d'un grand nombre de problèmes utiles aux arts mécaniques ou à la philosophie naturelle. La recherche qui présente le plus d'intérêt est celle des mouvemens des points de la courbe dans le sens vertical, mouvemens qui, dans l'hypothèse qui vient d'être faite, dépendent seuls du poids Π. Nous avons, pour en déterminer la nature, l'équation indéfinie

$$\frac{p}{gQ'}\cdot\frac{d^2y'}{dt^2}=\frac{p}{Q'}+\frac{d^2y'}{dx^2},\qquad(4)$$

qui doit subsister pour tous les points de la courbe; et l'équation déterminée

$$\frac{\Pi}{gQ'}\cdot\frac{d^2y'}{dt^2}=\frac{\Pi}{Q'}-2\frac{dy'}{dx},\qquad(5)$$

qui doit avoir lieu pour le point M, dont l'abscisse est h. Il faut que l'expression de

y' en x et t satisfasse à ces équations; et de plus, comme le point A est fixe, il faut qu'en supposant dans cette expression $x=0$, on ait $y'=0$.

207. En examinant les équations (4) et (5), on voit d'abord que la valeur de y' en x qui donnera la solution cherchée, doit nécessairement être composée de deux parties; savoir: 1.° d'une fonction de x seule, qui satisferait à l'équation indéfinie $\frac{d^2y'}{dx^2}=-\frac{p}{Q'}$, et qui donnerait, quand $x=h$, $\frac{dy'}{dx}=\frac{\Pi}{2Q'}$; 2.° d'une fonction de x et t, qui satisferait à l'équation indéfinie $\frac{d^2y'}{dx^2}=\frac{p}{gQ'}\cdot\frac{d^2y'}{dt^2}$, et qui donnerait, quand $x=h$, $\frac{dy'}{dx}=\frac{\Pi}{2gQ'}\cdot\frac{d^2y'}{dt^2}$. Or la première partie de cette valeur n'est évidemment autre chose que la fonction de x représentée ci-dessus par y, fonction qui satisfait aux équations (1) et (2), et dont l'équation (3), article 203, donne l'expression. D'après cela, nous pouvons prendre, au lieu des équations (4) et (5), les suivantes:

$$\frac{p}{gQ'}\cdot\frac{d^2y'}{dt^2}=\frac{d^2(y'-y)}{dx^2}, \qquad (6)$$

$$\frac{\Pi}{gQ'}\cdot\frac{dy'}{dt^2}=-2\frac{d(y'-y)}{dx}. \qquad (7)$$

208. Le procédé d'intégration que nous employons, consiste à chercher d'abord une valeur particulière qui satisfasse aux équations différentielles proposées; puis, en réunissant un nombre indéfini de valeurs semblables, à former une expression plus générale, au moyen de laquelle on puisse représenter l'état initial du système. En prenant pour valeur particulière

$$y'-y=B\sin.mx.\cos.nt,$$

m, n étant des nombres quelconques positifs, B un coëfficient arbitraire, et substituant cette valeur dans l'équation (6), on trouve que cette équation sera satisfaite si l'on a $\frac{p}{gQ'}n^2=m^2$. On parviendrait au même résultat en supposant

$$y'-y=C\sin.mx.\sin.nt;$$

par conséquent, l'expression générale

$$y'-y=\int\sin.mx\left(B\cos.m\sqrt{\frac{gQ'}{p}}\,t+C\sin.m\sqrt{\frac{gQ'}{p}}\,t\right), \qquad (8)$$

où le signe $\int$ indique une somme que l'on formerait en ajoutant une infinité de termes semblables à la quantité affectée de ce signe, dans lesquels m, B, C auraient des valeurs quelconques, satisfera à l'équation indéfinie (6).

209. En substituant ensuite l'expression (8) de $y'-y$ dans l'équation déterminée

(7), qui appartient au point M, et faisant $x = h$ après la substitution, on voit que cette équation sera satisfaite, si les valeurs des nombres représentés par m sont tellement choisies que l'on ait toujours

$$\frac{\Pi m}{2p} \sin. mh = \cos. mh, \text{ ou } mh \operatorname{tang.} mh = \frac{2ph}{\Pi}. \qquad (9)$$

Il existe un nombre infini de valeurs de m qui satisfont à l'équation (9) ; et on acquérera une idée très-distincte de ces valeurs, en admettant qu'ayant pris pour abscisse la quantité mh, on ait construit la courbe dont l'ordonnée serait mh tang. mh (fig. 24, pl. XI), courbe qui serait composée d'une infinité de branches, dont la première touche l'axe des abscisses à l'origine A, dont les autres le coupent aux distances de l'origine π, 2π, 3π, ..., et qui ont pour asymptotes des perpendiculaires à cet axe, placées aux distances $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$,..... En supposant de plus qu'on trace au-dessus de l'axe des abscisses une parallèle à cet axe, située à la distance $AC = \frac{2ph}{\Pi}$, les abscisses des points m, m', m'',.... où cette parallèle coupera chacune des branches de la courbe, donneront évidemment la suite infinie des valeurs de mh qui satisfont à l'équation (9), et par suite celles des nombres m qui doivent entrer dans chacun des termes de la série (8).

210. Il ne reste plus d'inconnu dans cette équation que les coëfficiens B, C, que l'on déterminera d'après l'état initial du système. En supposant $t = 0$, il vient

$$y' - y = \int B \sin. mx.$$

Par conséquent, si nous représentons par une fonction quelconque $\varphi(x)$ la quantité dont le point ayant x pour abscisse est déplacé verticalement à l'origine du mouvement, nous devons avoir

$$\varphi x = \int B \sin. mx. \qquad (10)$$

De même, si, après avoir différencié l'équation (8) par rapport à t, nous supposons $t = 0$, nous aurons

$$\frac{dy'}{dt} = \int C.m \sqrt{\frac{gQ'}{p}}. \sin. mx.$$

Par conséquent, en représentant par une autre fonction arbitraire $\psi(x)$ la vîtesse verticale imprimée à l'origine du mouvement au point dont l'abscisse est x, nous aurons

$$\psi x = \int C.m \sqrt{\frac{gQ'}{p}}. \sin. mx. \qquad (11)$$

Il ne reste plus qu'à déduire les valeurs des coëfficiens B et C des équations (10) et (11), en employant les méthodes données par M. Fourier (*).

Pour cela, différenciant l'équation (10), nous écrivons

$$\frac{d.\varphi x}{dx} = \int B.m \cos. mx.$$

Multipliant les deux membres par $dx. \cos. m'x$, m' étant, aussi bien que m, un des nombres compris dans la série de ceux qui satisfont à l'équation (9), nous intégrons entre les limites o et h, ce qui donne

$$\int_0^h dx.\cos. m'x.\frac{d.\varphi x}{dx} = \int B.m\int_0^h dx.\cos. mx.\cos. m'x.$$

Or, en remarquant que $\cos. mx.\cos. m'x = \frac{1}{2}[\cos.(mx + m'x) + \cos.(mx - m'x)]$, on trouve facilement que

$$\int_0^h dx.\cos. mx.\cos. m'x = \frac{m \sin. mh \cos. m'h - m' \cos. mh \sin. m'h}{m^2 - m'^2}.$$

Mais, d'autre part, les nombres m et m' satisfaisant à l'équation (9), nous avons

$$m \sin. mh - \frac{2p}{\Pi}\cos. mh = 0,$$

$$m'\sin. m'h - \frac{2p}{\Pi}\cos. m'h = 0;$$

ou, en multipliant la première équation par $\cos. m'h$, la seconde par $\cos. mh$, et retranchant l'une de l'autre,

$$m \sin. mh \cos. m'h - m' \sin. m'h.\cos. mh = 0.$$

Par conséquent, l'intégrale précédente est nulle, du moins tant que les nombres m, m' sont différens : car si ces nombres sont égaux, le dénominateur de la fraction qui donne la valeur de cette intégrale devenant nul, aussi bien que le numérateur, il est possible qu'elle ait alors une valeur finie. On trouve effectivement dans ce cas, pour la valeur de cette intégrale,

$$\int_0^h dx \cos.^2 mx = \frac{\text{in. } 2mh + 2mh}{4m}.$$

Il résulte de là qu'en effectuant les intégrations indiquées dans l'équation précédente, on fera disparaître tous les termes du second membre, hors celui qui contient le coëfficient B, et qu'il restera simplement, après cette opération,

$$\int_0^h dx.\cos. mx.\frac{d.\varphi x}{dx} = Bm.\frac{\sin. 2mh + 2mh}{4m};$$

(*) Voyez la *Théorie analytique de la chaleur.*

d'où l'on déduit, en mettant sous le signe d'intégration, à la place de x, une variable auxiliaire α,

$$B = \frac{4}{\sin. 2mh + 2mh} \int_0^h \cos. m\alpha . d . \varphi\alpha .$$

Une opération absolument semblable, exécutée sur l'équation (11), donnera

$$C = \frac{4}{m\sqrt{\frac{gQ'}{p}}\,(\sin. 2mh + 2mh)} \int_0^h \cos. m\alpha . d . \psi\alpha .$$

En remarquant maintenant que $\int \cos. m\alpha . d . \varphi\alpha = \cos. m\alpha . \varphi\alpha + m\int d\alpha . \sin. m\alpha . \varphi\alpha$, et que, au point A (fig. 13), situé à l'origine de l'intégrale, point qui est fixe, on a nécessairement $\varphi\alpha = 0$, on voit que $\int_0^h \cos. m\alpha . d . \varphi\alpha = \cos. mh . \varphi(h) + m\int_0^h d\alpha . \sin. m\alpha . \varphi\alpha$.

On a aussi dans le même point $\psi\alpha = 0$, et par conséquent $\int_0^h \cos. m\alpha . d . \psi\alpha = \cos. mh . \psi(h) + m\int_0^h d\alpha . \sin. m\alpha . \psi\alpha$. Les expressions précédentes de B et C deviennent donc

$$B = \frac{4}{\sin. 2mh + 2mh}\left(\cos. mh . \varphi(h) + m\int_0^h d\alpha . \sin. m\alpha . \varphi\alpha\right),$$

$$C = \frac{4}{m\sqrt{\frac{gQ'}{p}}(\sin. 2mh + 2mh)}\left(\cos. mh . \psi(h) + m\int_0^h d\alpha . \sin. m\alpha . \psi\alpha\right).$$

211. En substituant ces valeurs dans l'équation (8), cette équation devient

$$y' - y = \int \sin. mx \left\{ \begin{array}{l} \frac{4}{\sin. 2mh + 2mh}\left(\cos. mh . \varphi(h) + m\int_0^h d\alpha . \sin. m\alpha . \varphi\alpha\right)\cos. m\sqrt{\frac{gQ'}{p}} . t \\ \frac{4}{m\sqrt{\frac{gQ'}{p}}(\sin. 2mh + 2mh)}\left(\cos. mh . \psi(h) + m\int_0^h d\alpha . \sin. m\alpha . \psi\alpha\right)\sin. m\sqrt{\frac{gQ'}{p}} . t \end{array} \right\}, \quad (12)$$

et il n'y reste plus rien d'indéterminé.

On voit, par la forme de cette expression, que le mouvement de la corde est le résultat de la superposition d'une infinité de mouvemens simples, représentés chacun par un des termes de la série qui forme le second membre de l'équation (12). Ces mouvemens simples consistent dans une suite indéfinie d'oscillations égales, dans lesquelles les points de la corde se transportent de part et d'autre de la situation primitive. La durée de ces oscillations se trouve en posant $m\sqrt{\frac{gQ'}{p}}\,t = 2\pi$, d'où $t = \frac{2\pi}{m}\sqrt{\frac{p}{gQ'}}$: cette durée diffère donc pour chacun des mouvemens dont il s'agit; et

de plus, à cause de l'irrationalité des nombres m, ces divers mouvemens s'accomplissent dans des temps qui n'ont point de mesure commune, en sorte que la corde ne revient jamais à la même situation, et ne pourrait rendre de sons appréciables.

212. Pour nous former une idée plus distincte des résultats compris dans la formule (12), nous l'appliquerons au cas que nous avons principalement en vue; c'est-à-dire que nous supposerons qu'à l'instant où $t=0$, la corde a la figure qui convient à l'état d'équilibre, et que le mouvement est simplement produit par une vîtesse verticale imprimée au point où est placé le poids Π. Dans ce cas, $\varphi\alpha=0$ dans toute l'étendue de la courbe; et $\psi\alpha$ est également nulle dans toute cette étendue, sauf dans un très-petit espace ω situé en M, dans l'étendue duquel nous admettrons que $\psi\alpha=V$, V étant ainsi la vîtesse initiale imprimée à ce point. On aura donc $\cos. mh.\psi(h) = \cos. mh.V$, et $\int_0^h d\alpha \sin. m\alpha.\psi\alpha = \omega V \sin. mh$; et comme ω peut être supposé aussi petit que l'on voudra, ce terme peut être négligé à l'égard du précédent. L'équation (12) deviendra donc

$$y'-y=4V\sqrt{\frac{p}{gQ'}}\,S\frac{\cos. mh}{m(\sin. 2mh+2mh)}\sin. mx.\sin. m\sqrt{\frac{gQ'}{p}}.t. \qquad (13)$$

213. Admettons de plus que le poids Π placé au point M soit fort petit par rapport au poids total du pont représenté par $2ph$, supposition qui, dans les applications, s'accordera avec la vérité, puisque nous considérons ici Π comme représentant le poids d'une voiture qui serait placée au milieu de la longueur du plancher. Les nombres représentés par m étant donnés par l'équation (9), ou

$$\text{tang. } mh=\frac{2ph}{mh.\Pi},$$

nous avons donc

$$mh.\text{arc}\left(\cot.=\frac{\Pi}{2ph}.mh\right)=\frac{(2i+1)\pi}{2}-\text{arc}\left(\text{tang.}=\frac{\Pi}{2ph}.mh\right),$$

i étant un nombre entier quelconque; ou bien, en développant $\text{arc}\left(\text{tang.}=\frac{\Pi}{2ph}.mh\right)$ en série, et se bornant au premier terme, ce qui est permis quand $\frac{\Pi}{2ph}$ est très-petit,

$$mh=\frac{(2i+1)\pi}{2}-\frac{\Pi}{2ph}.mh;$$

d'où l'on déduit

$$2mh=\frac{(2i+1)\pi}{1+\frac{\Pi}{2ph}}. \qquad (14)$$

Cette équation donnera la suite des valeurs de m qui conviennent à l'hypothèse pré-

cédente, en faisant successivement $i = 0$, $i = 1$, $i = 2$, $i = 3$, &c. Il est bon de remarquer toutefois qu'en se bornant au premier terme dans le développement de arc $\left(\text{tang.} = \frac{\Pi}{2ph} \cdot mh\right)$, on commet une erreur d'autant plus sensible que m est plus grand. Mais comme, d'autre part, les termes de l'expression (13) de $y' - y$, à raison du dénominateur $m\,(\sin. 2mh + 2mh)$, deviennent très-petits quand m est fort grand, et peuvent alors être négligés, l'erreur dont il s'agit ne peut influer sensiblement sur le résultat. Il est donc permis de considérer m comme déterminé exactement par l'équation (14), qui, en négligeant les puissances supérieures de $\frac{\Pi}{2ph}$, peut s'écrire

$$2mh = (2i + 1)\pi\left(1 - \frac{\Pi}{2ph}\right).$$

On en déduit

$$\sin. 2mh = \sin. (2i + 1)\,\pi\,\frac{\Pi}{2ph},$$

$$\sin. mh = \cos. \frac{(2i + 1)\pi}{2}\,\frac{\Pi}{2ph},$$

$$\cos. mh = \sin. \frac{(2i + 1)\pi}{2}\,\frac{\Pi}{2ph}.$$

Substituant toutes ces valeurs dans l'équation (13), il viendra

$$y' - y = 4V\sqrt{\frac{p}{gQ'}}\,\frac{2h}{\pi\left(1 - \frac{\Pi}{2ph}\right)}\,\underset{i=0}{\overset{i=\infty}{S}}\,\frac{\sin.\frac{(2i+1)\pi}{2}\,\frac{\Pi}{2ph} \cdot \sin.\frac{(2i+1)\pi}{2}\left(1 - \frac{\Pi}{2ph}\right)\frac{x}{h}}{(2i+1)\left[\sin.(2i+1)\pi\,\frac{\Pi}{2ph} + (2i+1)\pi\left(1 - \frac{\Pi}{2ph}\right)\right]}\,\sin.\frac{(2i+1)\pi}{2h}\left(1 - \frac{\Pi}{2ph}\right)\sqrt{\frac{gQ'}{p}}\,t, \qquad (15)$$

formule qui donnera la loi des mouvemens des points de la corde, dans le cas particulier dont il s'agit.

Les mouvemens simples représentés par les termes de la série, dans lesquels le mouvement de la corde se décompose, consistent toujours dans des oscillations dont la durée s'évalue en posant $\frac{(2i + 1)\pi}{2h}\left(1 - \frac{\Pi}{2ph}\right)\sqrt{\frac{gQ'}{p}} \cdot t = 2\pi$; ce qui donne

$$t = \frac{4h}{2i + 1}\left(1 + \frac{\Pi}{2ph}\right)\sqrt{\frac{p}{gQ'}};$$

ou, en mettant pour Q' la valeur donnée par l'équation (13), article 123, pour le cas où Π est fort petit par rapport à $2ph$,

$$t = \frac{4}{2i + 1}\left(1 + \frac{\Pi}{8ph}\right)\sqrt{\frac{2f}{g}}. \qquad (16)$$

La durée des mouvemens dont il s'agit est donc à peu près proportionnelle à la racine carrée de la flèche de la courbure des chaînes ; ainsi elle est plus grande dans un grand

pont que dans un petit. Les durées des oscillations simples décroissent comme les nombres $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}$, &c. : ainsi, quand le poids Π est fort petit par rapport à celui de la corde, les oscillations peuvent donner des sons; mais ces sons différeraient de ceux produits par une corde tendue en ligne droite, et sur laquelle aucun poids n'est placé; ces derniers étant, comme l'on sait, produits par des oscillations simples dont les durées décroissent comme les nombres $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, &c. Dans le mouvement représenté par le premier terme de la série, où $i = 0$, les points de la corde sont tous transportés d'un même côté de la situation d'équilibre. Dans les mouvemens représentés par les termes suivans, où $i = 1$, $i = 2$, $i = 3$, &c., la figure de la corde est une courbe sinueuse, qui coupe la figure correspondante à l'équilibre en 2, 4, 6, &c. points. Les projections des points d'intersection sur l'axe AB partagent cet axe en trois, cinq, sept, &c. parties qui ne sont point tout-à-fait égales, les divisions voisines du milieu étant un peu plus petites que celles voisines des extrémités.

214. En faisant $x = h$ dans la formule (15), cette formule donnera le mouvement du point M où le poids Π est placé, et qui, de tous les points du fil, est celui qui s'écarte le plus de la situation primitive d'équilibre. En remarquant que

$$\sin.\frac{(2i+1)\pi}{2}\,\frac{\Pi}{2ph}\,.\,\sin.\frac{(2i+1)\pi}{2}\left(1-\frac{\Pi}{2ph}\right)=\frac{1}{2}\sin.(2i+1)\pi\frac{\Pi}{2ph};$$

on a pour la loi du mouvement de ce point,

$$y'-y=2V\sqrt{\frac{p}{gQ'}}.\frac{2h}{\pi\left(1-\frac{\Pi}{2ph}\right)}\mathop{S}_{i=0}^{i=\infty}\frac{\sin.(2i+1)\pi\frac{\Pi}{2ph}}{(2i+1)\left[\sin.(2i+1)\pi\frac{\Pi}{2ph}+(2i+1)\pi\left(1-\frac{\Pi}{2ph}\right)\right]}\sin.\frac{(2i+1)\pi}{2h}\left(1-\frac{\Pi}{2ph}\right)\sqrt{\frac{gQ'}{p}}\,t.$$

Mais quand $\frac{\Pi}{2ph}$ est une fraction très-petite, $(2i+1)\pi\frac{\Pi}{2ph}$ est un arc fort petit, à moins que i ne soit grand, ce qui n'a lieu, comme on l'a déjà remarqué, que dans les termes de la série qui peuvent être négligés. Par conséquent la valeur de l'expression précédente diffère alors peu de

$$y'-y=2V\sqrt{\frac{p}{gQ'}}.\frac{\Pi}{\pi p\left(1-\frac{\Pi}{2ph}\right)}\mathop{S}_{i=0}^{i=\infty}\frac{1}{2i+1}\sin.\frac{(2i+1)\pi}{2h}\left(1-\frac{\Pi}{2ph}\right)\sqrt{\frac{gQ'}{p}}\,t.\quad(17)$$

Les plus grandes valeurs données par cette formule répondent à la supposition $t = \frac{h}{1-\frac{\Pi}{2ph}}\sqrt{\frac{p}{gQ'}}$. En faisant cette supposition, la série du second membre devient $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} +$ &c., dont la valeur est $\frac{\pi}{4}$. Ces plus grandes valeurs sont donc exprimées, à fort peu près, par

$$y'-y=V\sqrt{\frac{p}{gQ'}}.\frac{\Pi h}{2ph-\Pi};$$

ou, en remplaçant Q' par la valeur $Q' = \frac{ph^2 + \Pi h}{2f\left(1 + \frac{\Pi}{4ph}\right)}$ donnée par l'équation (13), article 123, par

$$y' - y = \frac{V.\Pi}{2ph - \Pi} \sqrt{\frac{f}{2g} \cdot \frac{4ph + \Pi}{ph + \Pi}}.$$

Cette dernière expression, quand Π est fort petit par rapport à ph, diffère très-peu de

$$y' - y = \frac{V\Pi}{2ph}\left(1 + \frac{\Pi}{8ph}\right)\sqrt{\frac{2f}{g}}. \qquad (18)$$

Ainsi le plus grand écart du point milieu du fil, à partir de la situation d'équilibre, est à fort peu près proportionnel à $\frac{V.\Pi}{ph}\sqrt{f}$. Cet écart augmente comme la racine carrée de la flèche de la courbure des chaînes, et réciproquement à la longueur du plancher. Dans des ponts de diverses grandeurs, dans lesquels la flèche de la courbure des chaînes serait proportionnelle à l'ouverture des arches, l'écart dont il s'agit serait à fort peu près réciproque à la racine carrée de cette ouverture.

215. Si l'on différencie l'équation (17) par rapport à t, elle donnera

$$\frac{dy'}{dt} = 2V\frac{\Pi}{2ph} \int_{i=0}^{i=\infty} \cos. \frac{(2i+1)\pi}{2h}\left(1 - \frac{\Pi}{2ph}\right)\sqrt{\frac{gQ'}{p}}.t \qquad (19)$$

pour l'expression de la vîtesse avec laquelle le point M chargé du poids Π exécute ses oscillations. Cette vîtesse est donc proportionnelle à la vîtesse imprimée V, et au rapport du poids Π au poids total du pont.

216. Nous nous dispenserons de considérer en détail l'équation

$$\frac{p}{gQ'} \cdot \frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dx^2},$$

trouvée article 204, qui se rapporte aux déplacemens horizontaux des points de la courbe, et qui ne diffère point de l'équation ordinaire des cordes vibrantes. D'ailleurs, dans le cas particulier que nous venons de traiter, où, à l'origine du mouvement, la figure du fil est celle qui convient à l'équilibre, et où les oscillations subséquentes sont uniquement produites par une vîtesse verticale imprimée au point de suspension du poids Π, on voit, par la nature même de cette équation, que les points du fil ne se déplaceront point horizontalement. Il est nécessaire, pour que l'expression de x' en x et t qui serait déduite de cette équation ne soit pas constamment nulle, qu'un ou plusieurs points du fil aient, à l'origine du mouvement, été déplacés dans le sens horizontal, ou animés de vîtesses horizontales.

217. Les résultats auxquels nous venons de parvenir méritent beaucoup d'attention.

On en conclut que les petits mouvemens oscillatoires causés par le passage des voitures, loin de devenir plus sensibles quand l'ouverture des ponts augmente, s'affaiblissent au contraire, en sorte que les déplacemens des points ont une moindre étendue, et qu'ils s'exécutent avec des vîtesses moindres. L'étendue des oscillations décroît comme la racine carrée de la longueur du plancher; et la vîtesse, proportionnellement à cette longueur. Le danger pour la solidité et la durée des constructions ou l'incommodité qui peuvent résulter des oscillations dont il s'agit, sont donc moins à craindre dans les grandes constructions que dans les petites.

§. XI.

Des vibrations longitudinales des chaînes, dues à l'élasticité du fer.

218. Nous nous proposons actuellement d'introduire dans la recherche des mouvemens d'oscillation ou de vibration des chaînes, la condition de l'élasticité. En vertu de cette propriété, qui permet aux parties des chaînes de céder à l'extension, et les oblige à se contracter quand l'action de la force a cessé, il ne peut être imprimé aucune secousse à la construction, sans qu'il n'en résulte des vibrations dans lesquelles ces parties s'allongent et s'accourcissent alternativement. Si les fers dont les chaînes sont formées doivent s'altérer avec le temps, les mouvemens dont il s'agit, continuellement répétés, paraissent devoir être une des principales causes de cette altération. Il est donc utile d'en connaître les lois, et de savoir comment l'étendue et la rapidité des excursions des points, de part et d'autre des positions d'équilibre, dépendent des dimensions et de la figure des ponts.

Ces effets peuvent encore être considérés sous un point de vue qui n'offre pas moins d'intérêt. Un choc, en déplaçant violemment le point du système sur lequel il s'exerce, étend ou contracte les parties voisines de ce point. Il importe de connaître la grandeur de ces extensions ou contractions, afin de pouvoir régler la grosseur des pièces, de manière que, dans aucun cas, elles ne puissent être rompues, ni même détériorées sensiblement.

219. Parmi les questions du genre de celles dont il s'agit, la plus simple est la suivante. On suppose qu'un fil ou une verge élastique AB (fig. 25, pl. XI) est suspendu verticalement par l'extrémité supérieure A. On admet ensuite qu'un poids Π, tombant d'une hauteur donnée, rencontre un arrêt placé à l'extrémité inférieure B. L'effet de ce choc est d'imprimer au point B, et par suite à tous les points du fil, à l'exception du point A, supposé fixe, des mouvemens dont il s'agit de connaître les lois. On veut connaître aussi l'extension que subissent les élémens de la verge à l'instant

du choc. Au moyen de la solution de cette question, on appréciera les effets qui pourraient se produire dans les tiges de suspension d'un pont, si un choc violent était exercé sur le plancher près des extrémités inférieures de ces tiges, ou l'on fixera du moins des limites que ces effets ne pourraient dépasser dans les constructions.

Nommons x la distance Am d'un point quelconque m du fil au point fixe A. La longueur de l'élément mn placé à la suite de ce point, dans l'état naturel du fil, sera représentée par dx. Supposons d'abord le fil en équilibre sous l'action de son propre poids, et sous celle du poids Π suspendu au point B. Tous les élémens se seront allongés : l'élément mn se sera transporté en pq. Désignons par ξ la distance Ap, ou la valeur qu'a prise x. La nouvelle longueur pq qu'a prise l'élément dx sera $d\xi$, et la quantité dont cet élément s'est allongé sera $d\xi - dx$.

Cela posé, représentant, comme dans le paragraphe VII, par E le poids capable d'allonger une partie du fil d'une quantité égale à la longueur de cette partie, et supposant toujours les extensions ou allongemens proportionnels aux poids qui les produisent, nous aurons $E\,\frac{d\xi - dx}{dx}$, ou $E\left(\frac{d\xi}{dx} - 1\right)$, pour la valeur du poids qui a été capable de porter la longueur de l'élément mn de la valeur dx à celle $d\xi$, c'est-à-dire pour la valeur de la tension qui a lieu au point p de la verge. En passant au point suivant q, cette valeur augmentera de sa différentielle, et deviendra $E\left(\frac{d\xi}{dx} + \frac{d^2\xi}{dx} - 1\right)$. Ainsi, en regardant comme positives les forces qui tendent à augmenter les x, l'élément pq est sollicité de haut en bas par la différence de ces deux tensions, qui est $E\,\frac{d^2\xi}{dx}$. Or cet élément ne peut être en équilibre à moins que cette force, réunie au poids de l'élément, ne fasse une somme nulle. Si nous désignons par p le poids de l'unité de longueur du fil, le poids de l'élément est pdx : nous avons donc l'équation

$$E\,\frac{d^2\xi}{dx} + pdx = 0, \text{ ou } \frac{d^2\xi}{dx} = -\frac{p}{E}, \tag{1}$$

qui doit subsister pour tous les points.

220. Il existe de plus une équation particulière pour le point B : il est nécessaire, en effet, que la tension de l'élément extrême du fil fasse équilibre au poids Π, condition qui donne

$$E\left(\frac{d\xi}{dx} - 1\right) = \Pi, \text{ ou } \frac{d\xi}{dx} = \frac{\Pi}{E} + 1. \tag{2}$$

Si nous désignons par h la longueur AB, cette dernière équation devra être satisfaite quand nous supposerons $x = h$.

221. En opérant comme on l'a fait article 203, on trouvera pour la valeur de ξ

en x qui satisfait à ces deux équations et donne la loi des déplacemens des points dans le cas de l'équilibre,

$$\xi = \left(1 + \frac{\Pi + ph}{E}\right)x - \frac{p}{2E}x^2. \qquad (3)$$

L'expression

$$\frac{d\xi}{dx} - 1 = \frac{\Pi + p(h-x)}{E}, \qquad (4)$$

qui se déduit de cette équation, fait connaître la proportion suivant laquelle chaque élément du fil s'est allongé. L'élément contigu au point A, pour lequel on a $x=0$, est celui de tous qui a subi le plus grand allongement. On peut reconnaître, au moyen de l'expression (4), si cet allongement ne dépasse point une certaine limite que l'on aurait jugé convenable de fixer. Si l'on prenait pour règle, par exemple, d'après l'article 170, que la quantité dont une portion quelconque du fil pourra s'allonger, ne doit pas surpasser les 0,000 65 de la longueur de cette portion, on examinerait, en évaluant E conformément à ce qui a été dit article 176, si la quantité $\frac{\Pi + ph}{E}$ ne surpasse point 0,000 65 ; et si elle était plus grande, le fil devrait être regardé comme trop faible pour supporter le poids Π.

222. Supposons maintenant tous les points du fil en mouvement par suite de la chute du poids Π, conformément à ce qui a été dit au commencement de l'article 218. Nommons ξ' la valeur variable avec le temps t, que prend alors la distance Ap représentée par ξ. La masse de l'élément mn ou pq étant $\frac{pdx}{g}$, la force accélératrice à laquelle son mouvement est dû est exprimée par $\frac{pdx}{g}\cdot\frac{d^2\xi}{dt^2}$. Cette force accélératrice devant être égale à la résultante des forces qui agissent sur cet élément, on a, pour tous les points, l'équation

$$\frac{pdx}{g}\cdot\frac{d^2\xi'}{dt^2} = pdx + E\,\frac{d^2\xi'}{dx}, \text{ ou } \frac{p}{gE}\cdot\frac{d^2\xi'}{dt^2} = \frac{p}{E} + \frac{d^2\xi'}{dx^2}. \qquad (5)$$

223. A l'égard du point extrême B, la masse du poids Π placé en ce point étant $\frac{\Pi}{g}$, et la force accélératrice à laquelle le mouvement de ce poids est dû, $\frac{\Pi}{g}\cdot\frac{d^2\xi'}{dt^2}$, on a pour l'équation du mouvement de ce point

$$\frac{\Pi}{g}\cdot\frac{\xi'}{dt^2} = \Pi - E\left(\frac{d\xi'}{dx} - 1\right), \text{ ou } \frac{\Pi}{gE}\cdot\frac{d^2\xi'}{dt^2} = \frac{\Pi}{E} + 1 - \frac{d\xi'}{dx}. \qquad (6)$$

224. La loi du mouvement des points du fil sera donnée par une fonction de x et t, qui satisfera à l'équation indéfinie (5), et à l'équation particulière (6) pour la valeur $x=h$. Comme le point A est fixe, il faudra d'ailleurs qu'en supposant dans cette

fonction $x = 0$, on ait $\xi' = 0$; et il sera nécessaire enfin qu'elle satisfasse aux conditions de l'état initial du fil. Ces conditions consistent en ce que, à l'instant où $t = 0$, tous les points ont les positions qui conviennent à l'état d'équilibre, c'est-à-dire qu'on a $\xi' = \xi$. De plus, tous ces points sont en repos, à l'exception du point extrême B, qui prend au premier instant du choc la vîtesse V, avec laquelle le poids Π vient le frapper. Il faudra donc que l'expression générale $\frac{d\xi'}{dt}$ de la vîtesse des points du fil soit nulle, quand $t = 0$, pour toutes les valeurs de x, à l'exception seulement de la valeur $x = h$, pour laquelle on doit alors avoir $\frac{d\xi'}{dt} = V$.

On voit facilement, en examinant les équations (5) et (6), que l'expression de ξ' doit être composée de deux parties, savoir : d'une fonction de x seulement, qui satisfait aux équations $\frac{d^2\xi'}{dx^2} = -\frac{p}{E}$ et $\frac{d\xi'}{dx} = \frac{\Pi}{E} + 1$, et d'une fonction de x et t, qui satisfait aux équations

$$\frac{d^2\xi'}{dx^2} = \frac{p}{gE} \cdot \frac{d^2\xi'}{dt^2}, \qquad \frac{d\xi'}{dx} = -\frac{\Pi}{gE} \cdot \frac{d^2\xi'}{dt^2}.$$

La première partie n'est autre chose que l'expression (3) de ξ trouvée dans l'article précédent. Les équations qu'il s'agit d'intégrer peuvent donc s'écrire

$$\frac{p}{gE} \cdot \frac{d^2\xi'}{dt^2} = \frac{d^2(\xi' - \xi)}{dx^2}, \tag{7}$$

$$\frac{\Pi}{gE} \cdot \frac{d^2\xi'}{dt^2} = -\frac{d(\xi' - \xi)}{dx}; \tag{8}$$

l'équation (7) ayant lieu pour tous les points, et l'équation (8) pour le point B où $x = h$ seulement.

225. Pour intégrer ces équations, nous posons

$$\xi' - \xi = \int A \sin. mx . \sin. m\sqrt{\frac{gE}{p}}\, t, \tag{9}$$

le signe $\int$ indiquant la somme d'un nombre indéfini de termes semblables, dans lesquels m, A sont des constantes arbitraires. Cette expression satisfait à l'équation (7): elle donne $\xi' = 0$ quand x et ξ sont nuls, et $\xi' = \xi$ quand $t = 0$. En la substituant dans l'équation (8), et faisant $x = h$, on voit que cette équation sera satisfaite, si l'on a

$$\frac{m\Pi}{p} \sin. mh = \cos. mh, \tag{10}$$

équation qui donnera un nombre infini de valeurs de m, que l'on prendra pour former les termes de la série (9).

226. A l'égard des coëfficiens A, on les déterminera par la considération de l'état initial. L'équation (9) donne, lorsque $t=0$,

$$\frac{d\xi'}{dt}=\int A.m\sqrt{\frac{gE}{p}}.\sin. mx.$$

Ainsi les coëfficiens doivent être déterminés de manière que cette quantité soit nulle pour toutes les valeurs de x, sauf pour la valeur $x=h$, qui doit la rendre égale à V. Une détermination absolument semblable a été faite dans les articles 210 et 212. En recourant à ces articles, on verra que l'expression définitive de $\xi'-\xi$ est

$$\xi'-\xi=4V\sqrt{\frac{p}{gE}}\int\frac{\cos. mh}{m(2mh+\sin. 2mh)}\sin. mx.\sin. m\sqrt{\frac{gE}{p}}.t, \qquad (11)$$

expression qui donne par conséquent la loi des mouvemens des points du fil, et résoud la question proposée. Elle apprend que ces mouvemens consistent dans une suite indéfinie d'oscillations. Chaque terme de la série, considéré en particulier, représente un mouvement formé d'oscillations égales, dont on connaît la durée en posant $m\sqrt{\frac{gE}{p}}.t=2\pi$, ce qui donne $t=\frac{2\pi}{m}\sqrt{\frac{p}{gE}}$. Ces durées diffèrent donc pour chacun des mouvemens dont il s'agit; et, par la nature des nombres m, elles n'ont point de mesure commune, en sorte que les points de la verge ne reviennent jamais en même temps aux situations primitives d'équilibre.

227. Considérons en particulier le cas où le poids Π serait très-grand par rapport au poids ph du fil. L'équation (10), qui peut s'écrire mh tang. $mh=\frac{ph}{\Pi}$, donne alors à très-peu près, pour la plus petite valeur de mh, $mh=\sqrt{\frac{ph}{\Pi}}$, d'où $m=\sqrt{\frac{p}{\Pi h}}$. Toutes les autres valeurs de m seront très-grandes par rapport à celle-ci, en sorte qu'on pourra négliger dans la formule (11) tous les termes à l'égard du premier; et comme mh est une quantité très-petite, on peut écrire 1 au lieu de cos. mh, $2\,mh$ au lieu de sin. $2mh$, et mx au lieu de sin. mx. On a donc dans ce cas

$$\xi'-\xi=V\sqrt{\frac{\Pi}{gE.h}}\,x.\sin.\sqrt{\frac{gE}{\Pi h}}\,t. \qquad (12)$$

Le mouvement des points consiste en une suite indéfinie d'oscillations égales, dont la durée est $2\pi\sqrt{\frac{\Pi h}{gE}}$. Chaque point s'écarte alternativement au-dessous et au-dessus de la position d'équilibre d'une quantité proportionnelle à la distance de ce point à l'extrémité A. L'étendue des excursions, à partir de la situation d'équilibre, est, pour le point extrême B, qui s'écarte le plus de cette situation,

$$V\sqrt{\frac{\Pi h}{gE}}. \qquad (13)$$

228. La formule (12) donne

$$\frac{d\xi'}{dx} = \frac{d\xi}{dx} + V\sqrt{\frac{\Pi}{gE.h}}\,\text{sin.}\sqrt{\frac{gE}{\Pi h}}\,t.$$

La proportion suivant laquelle les élémens de la verge sont allongés étant exprimée généralement par $\frac{d\xi'}{dx} - 1$, l'expression précédente fera connaître cette proportion à un instant quelconque. La plus grande extension possible a lieu quand $\text{sin.}\sqrt{\frac{gE}{\Pi h}}.t = 1$; et l'on a alors

$$\frac{d\xi'}{dx} - 1 = \frac{d\xi}{dx} - 1 + V\sqrt{\frac{\Pi}{gE.h}},$$

ou, en mettant pour $\frac{d\xi}{dx} - 1$ la valeur (4), article 221,

$$\frac{d\xi'}{dx} - 1 = \frac{\Pi + p(h-x)}{E} + V\sqrt{\frac{\Pi}{gE.h}}. \qquad (14)$$

Ainsi l'effet du choc du poids Π, tombant sur l'arrêt placé à l'extrémité du fil avec la vitesse V, est d'accroître les extensions actuelles de chacun des élémens, d'une fraction de la longueur primitive de ces élémens exprimée par

$$\frac{\Pi}{E} + V\sqrt{\frac{\Pi}{gE.h}}.$$

Ce choc produit donc, pour allonger les parties du fil, identiquement le même effet que produirait un poids

$$\Pi + V\sqrt{\frac{\Pi E}{gh}}, \qquad (15)$$

suspendu en repos à l'extrémité inférieure B. La formule (14) s'emploiera de la même manière qu'il a été dit que l'on devait employer la formule (4), article 220, pour vérifier si un fil ou une verge donnés ont une force suffisante pour résister aux chocs auxquels ils sont exposés. On peut remarquer que, d'après cette formule, l'effet d'un choc est d'autant moindre, toutes choses égales d'ailleurs, que la longueur du fil ou de la verge est plus grande, et décroît à-peu-près réciproquement à la racine carrée de cette longueur.

229. Nous considérerons maintenant un fil parfaitement flexible AOB (fig. 26, pl. XI), dont les deux extrémités sont attachées aux points fixes A, B, situés sur une ligne horizontale. Tous les points de ce fil sont chargés par des poids répartis unifor-

mément sur AB, p représentant le poids placé sur l'unité de longueur de cette ligne : un poids Π est placé en outre dans le milieu O du fil. La courbe AOB représentant la figure du fil, supposé d'abord inextensible et en équilibre, nous nommons x et y les coordonnées Ap et pm d'un point quelconque m, et s l'arc Am. En admettant ensuite que le fil devienne extensible, s'allonge sous la tension qu'il supporte, et se transporte dans la position $AO'B$,, nous fixons la position du point μ dans lequel le point m s'est transporté, en abaissant de ce point une normale μp sur courbe AmO, et désignant par σ l'arc Ap, et par τ la normale μp, qui sera toujours extrêmement petite. Nous concevons enfin que le fil élastique a été dérangé de la situation actuelle d'équilibre $AO'B$, et que, le point m oscillant de part et d'autre de la situation actuelle μ, les quantités σ et τ prennent des valeurs variables σ' et τ'. D'ailleurs, comme nous supposons les normales τ ou τ' extrêmement petites, nous regarderons la longueur $\mu\nu$ de l'élément placé à la suite du point μ comme ne différant point de la projection pq de cet élément sur la courbe AmO. En sorte que, la longueur de cet élément avant l'allongement du fil étant exprimée par ds, nous regarderons $d\sigma$ comme représentant la longueur qu'il a acquise lorsque le fil s'est transporté en $AO'B$, et $d\sigma'$ comme représentant la longueur variable qu'il prend lors des oscillations du fil.

Cela posé, représentant toujours par E le poids capable d'allonger une partie du fil d'une quantité égale à la longueur de cette partie, nous aurons $E\frac{d\sigma-ds}{ds}$, ou $E\left(\frac{d\sigma}{ds}-1\right)$, pour exprimer la tension qui a lieu au point μ dans le sens de la courbe, lorsque le fil est en équilibre; puisque, par hypothèse, la portion ds du fil s'est allongée de la quantité $d\sigma - ds$. La différentielle de cette quantité est $E\frac{d^2\sigma}{ds}$: en la mettant à la place de dT dans l'équation (c), article 96, on aura

$$E\frac{d^2\sigma}{ds} = -p\,dx\,.\frac{dy}{ds}, \text{ ou } \frac{d^2\sigma}{ds^2} = -\frac{p}{E}\,.\frac{dx}{ds}\,.\frac{dy}{ds}, \qquad (15)$$

équation dans laquelle ds est la variable indépendante, et qui doit subsister pour tous les points de la courbe, le fil étant supposé en équilibre.

230. Il existe une autre équation particulière au point O, que l'on trouvera en remarquant, comme dans l'article 202, que le poids Π dont ce point est chargé doit être égal à la résultante des tensions des élémens extrêmes des deux parties du fil qui sont séparées par ce point, ce qui donne pour l'équation cherchée

$$E\left(\frac{d\sigma}{ds}-1\right)\frac{dy}{ds} = \frac{\Pi}{2}, \text{ ou } \frac{d\sigma}{ds} = 1 + \frac{\Pi}{2E}\,.\frac{ds}{dy}. \qquad (16)$$

Cette relation doit subsister pour la valeur $s = c$ seulement, c représentant la demi-longueur AO du fil.

231. Pour intégrer ces équations, nous nous bornerons au cas où l'amplitude de la courbe AOB étant fort petite, on peut négliger le carré de $\frac{dy}{dx}$ à l'égard de l'unité, ou considérer ds comme égal à dx dans toute l'étendue de cette courbe. Les équations précédentes deviennent alors

$$\frac{d^2\sigma}{dx^2} = -\frac{p}{E}\cdot\frac{dy}{dx}, \qquad (17)$$

$$\frac{d\sigma}{dx} = 1 + \frac{\Pi}{2E}\cdot\frac{dx}{dy}. \qquad (18)$$

On doit remplacer dans ces équations dy par la valeur de cette quantité, déduite de l'expression de y en x qui représente la figure de la courbe dans l'état d'équilibre. Cette expression n'est autre chose que l'équation (3), article 203, qui donne

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\Pi + 2p(h-x)}{2Q'}.$$

en substituant cette valeur dans les équations précédentes, elles deviennent

$$\frac{d^2\sigma}{dx^2} = -\frac{p}{2EQ'}[\Pi + 2p(h-x)], \qquad (19)$$

$$\frac{d\sigma}{dx} = 1 + \frac{\Pi}{2E}\cdot\frac{2Q'}{\Pi + 2p(h-x)}. \qquad (20)$$

232. Supposons

$$\sigma = Ax + Bx^2 + Cx^3,$$

A, B, C étant des constantes arbitraires. En substituant cette valeur dans l'équation (19), qui doit subsister pour toutes les valeurs de x, et ensuite dans l'équation (20), qui doit être satisfaite pour la valeur $x = h$ seulement, on trouve les conditions suivantes:

$$C = \frac{p^2}{6EQ'},$$

$$B = -\frac{p(\Pi + 2ph)}{4EQ'},$$

$$A = 1 + \frac{2Q'^2 + ph(\Pi + ph)}{2EQ'};$$

en sorte que l'expression cherchée de σ en x est

$$\sigma = x + \frac{1}{2EQ'}\left\{[2Q'^2 + ph(\Pi + ph)]x - \tfrac{1}{2}p(\Pi + 2ph)x^2 + \tfrac{1}{3}p^2x^3\right\}. \qquad (21)$$

233. Si l'on suppose $x = h$, il viendra

$$\sigma = h + \frac{1}{2EQ'}(2Q'^2h + \tfrac{1}{2}ph^2\Pi + \tfrac{1}{3}p^2h^3).$$

Cette équation, en mettant pour Q' la valeur qui convient au cas d'équilibre dont il s'agit, valeur donnée par la formule (9), article 121, devient

$$\sigma = h + \frac{\Pi h^2 + ph^3}{E.2f'}\left(1 + \frac{(3p\Pi h + 2p^2h^3)f'^2}{3(\Pi h + ph^2)^2}\right);$$

et comme nous supposons ici l'amplitude de la courbe très-petite, le second terme de la parenthèse doit être négligé, et l'on doit écrire simplement

$$\sigma = h + \frac{\Pi h^2 + ph^3}{E.2f'}.$$

Ce résultat s'accorde avec celui que donnerait la formule (8), article 178, en y supposant également l'amplitude de la courbe très-petite. On a vu dans le paragraphe II comment devait être calculée f', qui représente la valeur que prend la flèche CO lorsque l'action du poids Π a modifié la figure primitive de la courbe : cette valeur, dans le cas où le poids Π est petit par rapport au poids total du pont, est donnée, à très-peu près (article 123), par la formule $f' = f\left(1 + \frac{\Pi}{4ph}\right)$, f représentant la valeur primitive de la flèche.

234. On déduit de l'équation (21)

$$\frac{d\sigma}{dx} - 1 = \frac{1}{2EQ'^2}\left\{2Q'^2 + ph(\Pi + ph) - p(\Pi + 2ph)x + p^2x^2\right\}, \quad (22)$$

pour l'expression de l'allongement de l'élément du fil situé au point dont l'abscisse est x.

235. Supposons maintenant le fil en mouvement. Nous pouvons regarder le mouvement du point μ comme étant composé de deux autres, l'un parallèle à pq, et l'autre à $p\mu$; et comme le mouvement dans le sens de la courbe est celui qu'il nous importe de connaître, parce qu'il donne la loi des extensions et contractions alternatives des élémens, ce sera le seul dont nous nous occuperons. La masse du poids dont l'élément $\mu\nu$ est chargé est $\frac{pdx}{g}$, et par conséquent la force accélératrice à laquelle est dû le mouvement dans le sens de la courbe est $\frac{pdx}{g}\cdot\frac{d^2\sigma'}{dt^2}$. D'après ce qui précède, le même élement, en vertu de la différence des tensions qui ont lieu aux deux extrémités, et de l'action de la gravité, est sollicité dans le même sens par la force $E\,\frac{d^2\sigma'}{ds}$ $+ pdx\,\frac{dy}{ds}$. L'équation du mouvement qui a lieu dans ce sens est donc

$$\frac{pdx}{g}\cdot\frac{d^2\sigma'}{dt^2} = E\,\frac{d^2\sigma'}{ds} + pdx\,\frac{dy}{ds}, \text{ ou } \frac{p}{gE}\cdot\frac{d^2\sigma'}{dt^2} = \frac{d^2\sigma'}{dx.ds} + \frac{p}{E}\cdot\frac{dy}{ds}. \quad (23)$$

236. Quant à l'équation particulière qui donne la loi du mouvement du point O,

V *

nous supposerons pour plus de simplicité, comme dans le paragraphe précédent, l'état initial du fil tel que les mouvemens des deux portions AO, BO soient parfaitement égaux, en sorte que le point O demeure dans une même verticale, avec laquelle les élemens extrêmes des deux parties du fil contiguës à ce point forment constamment le même angle. La masse du poids Π suspendu au point O est $\frac{\Pi}{g}$, et cette masse peut être censée partagée en deux parties égales, dont chacune est soutenue par une des portions du fil : la force accélératrice à laquelle est dû le mouvement de l'une ou l'autre de ces parties, dans le sens des élemens extrêmes du fil, étant $\frac{\Pi}{2g} \cdot \frac{d^2 \sigma'}{dt^2}$, l'équation du mouvement du poids Π, fondée sur le principe que cette expression de la force accélératrice doit être égale à la somme des forces qui sollicitent le point dans le même sens, sera

$$\frac{\Pi}{2g} \cdot \frac{d^2 \sigma'}{dt^2} = \frac{\Pi}{2} \cdot \frac{ds}{dy} - E\left(\frac{d\sigma'}{ds} - 1\right), \text{ ou } \frac{\Pi}{2gE} \cdot \frac{d^2 \sigma'}{dt^2} = \frac{\Pi}{2E} \cdot \frac{ds}{dy} - \left(\frac{d\sigma'}{dy} - 1\right). \quad (24)$$

237. En se bornant, comme ci-dessus, au cas où la courbe a peu d'amplitude, et écrivant dx au lieu de ds, les deux équations précédentes deviendront

$$\frac{p}{gE} \cdot \frac{d^2 \sigma'}{dt^2} = \frac{d^2 \sigma'}{dx^2} + \frac{p}{E} \cdot \frac{dy}{dx}, \quad (25)$$

et

$$\frac{\Pi}{2gE} \cdot \frac{d^2 \sigma'}{dt^2} = \frac{\Pi}{2E} \cdot \frac{dx}{dy} - \left(\frac{d\sigma'}{dx} - 1\right). \quad (26)$$

238. Il se présente ici une remarque semblable à celle faite ci-dessus, article 224; en effet, σ étant la fonction de x qui satisfait aux équations (17) et (18), fonction donnée par l'équation (21), nous pouvons considérer, au lieu des deux équations précédentes, l'équation indéfinie

$$\frac{p}{gE} \cdot \frac{d^2 \sigma'}{dt^2} = \frac{d^2 (\sigma' - \sigma)}{dx^2}, \quad (27)$$

qui doit subsister pour tous les points de la courbe; et l'équation particulière

$$\frac{\Pi}{2gE} \cdot \frac{d^2 \sigma'}{dt^2} = - \frac{d(\sigma' - \sigma)}{dx}, \quad (28)$$

qui doit subsister pour la valeur $x = h$ seulement.

239. Ces dernières équations ne diffèrent en rien des équations (6) et (7) du paragraphe précédent. On peut donc les intégrer par les méthodes employées dans ce paragraphe ; et, lorsqu'on aura déterminé les coëfficiens arbitraires, d'après la supposition que le poids Π est fort petit par rapport au poids total dont le pont est chargé, et

que le point O est le seul point auquel il ait été imprimé une vîtesse, on trouvera, pour l'expression de σ' qui convient à ces suppositions, une équation semblable à l'équation (15), article 213. Il faut remarquer d'ailleurs que supposer, comme dans le paragraphe X, qu'une vîtesse V est imprimée verticalement au point O, c'est supposer qu'il est imprimé à ce point des vîtesses $V.\frac{dy}{ds}$ dans le sens des deux élémens extrêmes des portions de courbe séparées par ce point. Cette expression, quand on écrit dx au lieu de ds, devient $V.\frac{dy}{dx}$; ou (en mettant pour $\frac{dy}{dx}$ la valeur déterminée pour le point où $x=h$ par l'équation (3), article 203) $V.\frac{\Pi}{2Q'}$. On doit donc, en même temps que l'on écrira dans l'équation (15) du paragraphe précédent σ et σ' au lieu de y et y', et E au lieu de Q', écrire $V.\frac{\Pi}{2Q'}$ au lieu de V; ce qui donnera

$$\sigma'-\sigma=\frac{V\Pi}{Q'}\sqrt{\frac{p}{gE}}.\frac{4h}{\pi\left(1-\frac{\Pi}{2ph}\right)}\int_{i=0}^{i=\infty}\frac{\sin.\frac{(2i+1)\pi}{2}.\frac{\Pi}{2ph}.\sin.\frac{(2i+1)\pi}{2}\left(1-\frac{\Pi}{2ph}\right)\frac{x}{h}}{(2i+1)\left[\sin.(2i+1)\pi\frac{\Pi}{2ph}+(2i+1)\pi\left(1-\frac{\Pi}{2ph}\right)\right]}\sin.\frac{(2i+1)\pi}{2h}\left(1-\frac{\Pi}{2ph}\right)\sqrt{\frac{gE}{p}}\,t. \quad (29)$$

240. En supposant, comme dans l'article 214, le poids Π très-petit par rapport au poids total dont le fil est chargé, et faisant $x=h$, on aura à fort peu près, pour la valeur particulière qui convient au point O de la courbe, au lieu de l'équation (17) de l'article cité,

$$\sigma'-\sigma=\frac{V\Pi^2}{pQ'}\sqrt{\frac{p}{gE}}.\frac{1}{\pi\left(1-\frac{\Pi}{2ph}\right)}\int_{i=0}^{i=\infty}\frac{1}{2i+1}\sin.\frac{(2i+1)\pi}{2h}\left(1-\frac{\Pi}{2ph}\right)\sqrt{\frac{gE}{p}}\,t. \quad (30)$$

Dans les vibrations dont il s'agit, le point O est celui de tous qui s'écarte le plus de la situation d'équilibre. La plus grande valeur de l'écart de ce point s'obtient en supposant $\frac{1}{h}\left(1-\frac{\Pi}{2ph}\right)\sqrt{\frac{gE}{p}}\,t=1$; ce qui change la série en $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+$ &c., ou $\frac{\pi}{4}$. Cette valeur est donc, à fort peu près,

$$\sigma'-\sigma=\frac{V\Pi^2}{4pQ'\left(1-\frac{\Pi}{2ph}\right)}\sqrt{\frac{p}{gE}};$$

ou, n mettant pour Q' la valeur $\frac{\Pi h+ph^2}{2f\left(1+\frac{\Pi}{4ph}\right)}$, article 123,

$$\sigma'-\sigma=\frac{V\Pi^2.f}{2p^2h^2}\left(1-\frac{\Pi}{4ph}\right)\sqrt{\frac{p}{gE}}. \quad (31)$$

Nous remarquerons ici que la constante E, par laquelle nous avons représenté le poids capable d'allonger une partie du fil d'une quantité égale à la longueur de cette partie, doit être regardée comme ayant, dans divers ponts où les chaînes seraient faites d'une même matière, une valeur proportionnelle à la section transversale des chaînes. Il est naturel d'ailleurs d'admettre qu'on aurait donné, dans chacun de ces ponts, à cette section transversale, une valeur à peu près proportionnelle à la tension horizontale Q. Ainsi on peut supposer E proportionnelle à Q, c'est-à-dire à $\frac{ph^2}{f}$. En remplaçant E par cette quantité, l'expression précédente devient

$$\frac{V\Pi^2 . f\sqrt{f}}{2p^2h^3}\left(1 - \frac{\Pi}{4ph}\right): \tag{32}$$

ainsi, dans les vibrations longitudinales qui sont produites dans les chaînes par les secousses résultant du mouvement des voitures, on peut regarder la plus grande valeur des espaces parcourus par les points, de part et d'autre des situations d'équilibre, comme à fort peu près proportionnelle, dans divers ponts, à la fonction $\frac{f\sqrt{f}}{p^2h^3}$. Il suit de là que, si l'on fait croître l'ouverture et la flèche des ponts dans un même rapport, la grandeur des excursions des points décroît proportionnellement à la puissance $\frac{3}{2}$ de l'ouverture.

241. Quant aux vîtesses avec lesquelles les points des chaînes se meuvent dans le sens de la longueur, on trouve, en différenciant l'équation (30) par rapport à t,

$$\frac{d\epsilon'}{dt} = \frac{V\Pi^2}{2pQ'h} \int_{i=0}^{i=\infty} \cos. \frac{(2i+1)\pi}{2h} \left(1 - \frac{\Pi}{2ph}\right) \sqrt{\frac{gE}{p}}\, t.$$

Ces vîtesses sont donc proportionnelles à $\frac{V\Pi^2}{pQ'h}$, ou, en remplaçant Q' par sa valeur, à

$$\frac{V\Pi^2 . f}{p^2h^3}\left(1 - \frac{3\Pi}{4ph}\right). \tag{33}$$

Ainsi, dans divers ponts, elles sont à fort peu près proportionnelles à la fonction $\frac{f}{p^2h^3}$; et quand l'ouverture et la flèche des ponts croissent dans un même rapport, ces vîtesses décroissent proportionnellement au carré de l'ouverture.

242. On peut remarquer que la durée des oscillations verticales, soumises au calcul dans le paragraphe précédent, et dépendantes de la flexibilité des chaînes, est, toutes choses égales d'ailleurs, proportionnelle à $\frac{1}{\sqrt{Q'}}$; tandis que la durée des vibrations longitudinales dues à l'élasticité des chaînes, et auxquelles se rapportent les formules

précédentes, est proportionnelle à $\frac{1}{\sqrt{E}}$. Il est aisé de se rendre compte que, dans la plupart des applications, les dimensions des chaînes seront toujours réglées de manière que la quantité E se trouvera plus de mille fois plus grande que la quantité Q'. Les vibrations longitudinales sont donc bien plus rapides que les oscillations verticales. Nous remarquerons encore que les oscillations verticales sont indépendantes de la matière dont les chaînes sont formées, et qu'il n'en est pas de même des vibrations longitudinales. La valeur de la constante E serait beaucoup plus petite pour des chaînes en bois que pour des chaînes en fer, conformément à ce qu'on a vu article 190 : les écarts des points, à partir des situations d'équilibre, seraient donc plus grands ; la construction paraîtrait plus flexible, et, quoique non moins solide, n'offrirait pas la la même rigidité.

243. La formule (29) donnera, en la différenciant par rapport à x, la valeur de la quantité $\frac{d\sigma'}{dx} - 1$, qui représente la quantité dont l'élément de la courbe situé au point dont l'abscisse est x s'allonge par l'effet du choc. Cette quantité varie avec le temps, et la plus grande valeur a lieu lorsque $\frac{(2i+1)\pi}{2h}\left(1 - \frac{\Pi}{2ph}\right)\sqrt{\frac{gE}{p}}.t = \frac{(2i+1)\pi}{2}$. On déduit donc de cette équation, pour le plus grand allongement des parties de la courbe, en remplaçant $\frac{d\sigma}{dx} - 1$ par la valeur (22), article 234,

$$\frac{d\sigma'}{dx} - 1 = \frac{1}{2EQ'}\left\{2Q'^2 + ph(\Pi + ph) - p(\Pi + 2ph)x + p^2x^2\right\}$$

$$+ \frac{2V\Pi}{Q'}\sqrt{\frac{p}{gE}} \int_{i=0}^{i=\infty} \frac{\sin.\frac{(2i+1)\pi}{2}.\frac{\Pi}{2ph}.\cos.\frac{(2i+1)\pi}{2}\left(1 - \frac{\Pi}{2ph}\right)\frac{x}{h}}{\sin.(2i+1)\pi.\frac{\Pi}{2ph} + (2i+1)\pi\left(1 - \frac{\Pi}{2ph}\right)}.(-1)^i. \quad (34)$$

Le premier terme représente l'allongement que subiraient les élémens de la courbe par l'effet seul de la charge $2ph$ distribuée uniformément sur AB et du poids Π suspendu au point O, le système étant supposé en équilibre. Le second terme représente la quantité dont l'allongement de l'élément de la courbe, au point dont l'abscisse est x, est augmenté par l'effet du choc du poids Π tombant sur le point O avec la vitesse verticale V. On doit remarquer ici qu'il n'est pas permis, dans le cas même où la fraction $\frac{\Pi}{2ph}$ est très-petite, de faire dans la formule précédente (34) les simplifications qui ont pu être faites dans la formule (15), article 213, ou dans la formule (29), article 239. En effet, les termes sous le signe S dans la formule (34) contiennent au dénominateur un facteur de moins en i : ces termes décroissent donc beaucoup moins rapidement, et par conséquent l'erreur que l'on commet en faisant les simplifications dont il s'agit,

influe sur des termes que l'on ne peut négliger. On voit néanmoins qu'à mesure que la fraction $\frac{\Pi}{2ph}$ approche davantage de la valeur zéro, le second terme de l'expression de $\frac{de'}{dx} - 1$ approche de plus en plus d'une limite exprimée par

$$\frac{V\Pi^2}{Q'.2ph}\sqrt{\frac{p}{gE}}\overset{i=\infty}{\underset{i=0}{\int}}(-1)^i \cos.\frac{(2i+1)\pi}{2}.\frac{x}{h}.$$

Cette formule, en mettant pour Q' la valeur $Q' = \frac{\Pi h + ph^2}{2f\left(1+\frac{\Pi}{4ph}\right)}$, article 123, devient

$$\frac{V\Pi^2 f}{p^2 h^3}\left(1 - \frac{3\Pi}{4ph}\right)\sqrt{\frac{p}{gE}}\overset{i=\infty}{\underset{i=0}{\int}}(-1)^i \cos.\frac{(2i+1)\pi}{2}.\frac{x}{h}. \qquad (35)$$

En remarquant maintenant, comme on l'a fait article 240, que la quantité E sera toujours, dans divers ponts, proportionelle à Q, ou à $\frac{ph^2}{2f}$, et en remplaçant E par cette quantité, on voit que la valeur du coëfficient de la série est à peu près proportionnelle à

$$\frac{V\Pi^2 f\sqrt{f}}{p^2 h^4}; \qquad (36)$$

d'où l'on conclut que, dans le cas où le poids Π est fort petit par rapport au poids total dont le fil est chargé, la fraction de la longueur primitive des parties du fil qui représente l'allongement de ces parties résultant de la vîtesse V imprimée verticalement au poids Π, est à peu près proportionnelle à la quantité représentée par la formule (36). Par conséquent la quantité dont les parties de chaînes peuvent être allongées dans les ponts suspendus, par l'effet des secousses produites lors du passage des voitures, peut être regardée comme étant, toutes choses égales d'ailleurs, à peu près proportionnelle à la fonction $\frac{f\sqrt{f}}{p^2 h^4}$; en sorte que les allongemens dont il s'agit, lorsque l'on fait croître dans un même rapport la flèche de courbure et l'ouverture des arches, décroissent proportionnellement à la puissance $\frac{5}{2}$ de l'ouverture.

244. Quoique les résultats précédens aient été obtenus dans la supposition que l'amplitude du fil était très-petite, on peut être assuré néanmoins que les effets naturels s'en écarteront très-peu. Ces résultats s'accordent avec ceux obtenus dans le paragraphe X, pour établir qu'on n'a point à craindre, en augmentant la grandeur des ponts suspendus à des chaînes, de faire croître les effets des secousses résultant du passage des voitures. Ces effets diminuent, au contraire, à mesure que l'ouverture des

arches augmente. On les fera diminuer encore dans une progression plus rapide, si, en augmentant l'ouverture d'une arche, on n'augmente pas la flèche dans la même proportion. Ainsi, pourvu que l'on donne toujours aux chaînes une force proportionnée à la tension qu'elles ont à supporter, on peut être assuré que plus une arche sera grande, plus le plancher sera ferme rigide.

§. XII.

De l'action du vent sur les ponts suspendus, et des oscillations horizontales des chaînes.

245. Les recherches connues sur les lois du choc et de la résistance des fluides n'offrent pas les moyens d'apprécier avec l'exactitude qui serait à desirer, l'action du vent sur les ponts suspendus. On conçoit d'ailleurs que nous ne pouvons entreprendre de soumettre à des considérations exactes l'action tumultueuse de coups de vent irréguliers, variables dans leurs vîtesses et dans leurs directions. Les accidens qui résulteraient de cette action ne peuvent être appréciés et prévenus que d'après des lumières fournies par l'observation et l'expérience. Nous nous bornerons à supposer un vent uniforme, dont la direction est horizontale et perpendiculaire à l'axe du pont.

Les ponts suspendus sont composés de deux parties principales, les chaînes et le plancher. Les chaînes sont flexibles dans tous les sens, et il y a peu d'erreur, en général, à les supposer parfaitement flexibles, comme nous l'avons fait dans les recherches précédentes : cette supposition n'expose qu'à attribuer aux effets dépendant de cette flexibilité plus d'intensité qu'ils n'en auraient effectivement dans les constructions exécutées. Les planchers peuvent également être regardés comme parfaitement flexibles dans le sens vertical, à moins que l'on n'ait pris des précautions spéciales pour les rendre rigides; précautions utiles dans les constructions légères destinées aux piétons, mais qui deviennent superflues dans les ponts plus importans. Dans le sens horizontal, au contraire, le plancher ne peut être plié sans un effort considérable, qui dépend de l'ouverture du pont, de la largeur de ce plancher, et de la manière dont il est construit. Nous examinerons d'abord l'action du vent sur une chaîne flexible chargée par des poids, et nous chercherons ensuite comment l'effet de cette action peut être modifié par la liaison de la chaîne avec un corps résistant à la manière du plancher des ponts suspendus.

246. Soit un fil parfaitement flexible et inextensible AOB (fig. 27, pl. XI), dont les extrémités sont attachées aux points fixes A, B, situés sur une même ligne horizontale, et qui est chargé par des poids distribués uniformément dans l'intervalle AB.

Ce fil, supposé en équilibre sous la seule action de ces poids, affectera la courbure parabolique assujettie aux équations des articles 113 et suivans; et, tous les points se trouvant dans un même plan vertical, la projection du fil sur un plan horizontal sera une ligne droite, telle que *ab*. Mais si, dans cet état, le fil est choqué par le vent dans une direction horizontale perpendiculaire au plan dans lequel il est contenu, tous les points s'éleveront un peu en s'écartant de ce plan, en sorte que les projections horizontale et verticale du fil deviendront $ao'b$ et $AO'B$. On connaîtra facilement le nouvel état d'équilibre de ce fil d'après la propriété générale des systèmes formés par une ligne ou un polygone flexible; propriété qui consiste en ce que l'équilibre d'un système de ce genre suppose l'existence de l'équilibre dans trois projections de ce système. Ainsi la projection verticale $AO'B$ doit être telle, qu'un fil plié suivant cette courbe se trouve en équilibre sous l'action verticale des poids donnés qui chargent le fil dont il s'agit; la projection horizontale $ao'b$ doit aussi être telle, qu'un fil plié suivant cette courbe se trouve en équilibre sous l'action horizontale exercée par le vent sur ce même fil; enfin, si l'on projette la courbe et les forces appliquées à chaque point sur un plan vertical perpendiculaire à *ab*, il faut qu'il y ait encore équilibre dans cette troisième projection. En joignant à ces conditions celle que la longueur du fil ne change point, le nouvel état de ce fil se trouvera entièrement déterminé.

247. Pour appliquer ce principe, il faut d'abord apprécier l'action du vent. Nous ne pouvons entrer ici, sur les considérations relatives à la résistance des fluides, dont cette appréciation doit dépendre, dans des détails qui s'écarteraient trop du sujet de ce Mémoire : nous renverrons aux divers ouvrages où cette matière a été traitée (*), et nous remarquerons seulement qu'en désignant par b l'épaisseur de la chaîne dans le sens vertical, on peut, pour plus de simplicité et sans erreur dangereuse, assimiler l'action du vent à celle de forces horizontales qui seraient réparties uniformément sur la ligne *ab*, et dont la valeur, en nommant v la vîtesse du vent, Π le poids de l'unité de volume de l'air, g la vîtesse que la pesanteur imprime aux corps pesans dans l'unité de temps, et k un coefficient numérique dépendant de la figure de la chaîne, serait exprimée, pour une unité de longueur de cette ligne, par

$$k.\Pi b \frac{v^2}{2g}. \qquad (1)$$

Nous représenterons, pour abréger, cette quantité par q. Ainsi les points du fil, supposés en équilibre, sont regardés comme étant sollicités verticalement par des poids uniformément répartis sur AB, p étant le poids placé sur l'unité de longueur de cette

(*) On peut consulter sur cet objet la note (*db*), page 339 du tome I.er de la nouvelle édition de l'*Architecture hydraulique* de Bélidor, publiée en 1819 chez Firmin Didot.

ligne; et comme étant sollicités horizontalement par des forces qui sont aussi uniformément réparties sur AB, q étant la force appliquée sur l'unité de longueur de cette ligne.

248. Cette supposition équivaut évidemment à regarder les points du fil comme étant sollicités par des forces inclinées et parallèles, uniformément distribuées sur ab, la force appliquée sur l'unité de longueur de cette ligne étant $\sqrt{p^2+q^2}$, et l'angle qu'elle forme avec la verticale ayant pour sinus $\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}$. Par conséquent, la courbe du fil ne cesse point d'être plane; seulement le plan qui contient cette courbe s'incline suivant la direction des forces. Si nous nommons h la moitié AC de la distance AB des points fixes, f la flèche CO de la courbe du fil, f' et f'' les flèches CO', oo' des projections horizontale et verticale de cette courbe, Q la tension horizontale du fil, nous aurons donc

$$f'=f\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}},\ f''=f\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}},\ Q=\frac{h^2\sqrt{p^2+q^2}}{2f}; \qquad (2)$$

équations au moyen desquelles le nouvel état du fil est entièrement déterminé.

On en conclut que, toutes choses égales d'ailleurs, les déplacemens vertical et horizontal des points du fil sont proportionnels à la flèche f, et que l'accroissement de la tension horizontale $\left(\text{dont la valeur dans l'état naturel du fil est } \frac{ph^2}{2f}\right)$ est proportionnel au rapport $\frac{h^2}{f}$. Ainsi, en faisant varier la distance AB des extrémités fixes du fil et la flèche CO dans la même proportion, les déplacemens des points et l'accroissement de la tension varient proportionnellement à cette distance AB.

249. Si l'action du vent représentée par q était fort petite par rapport au poids p, les équations précédentes différeraient très-peu de

$$f'=f\left(1-\frac{q^2}{2p^2}\right),\ f''=f\frac{q}{p}\left(1-\frac{q^2}{2p^2}\right),\ Q=\frac{ph^2}{2f}\left(1+\frac{q^2}{2p^2}\right). \qquad (3)$$

Ainsi le point milieu du fil éprouve alors un déplacement horizontal à fort peu près proportionnel au rapport de la force du vent au poids dont le fil est chargé; le déplacement vertical de ce point est extrêmement petit par rapport au déplacement horizontal; enfin, l'accroissement de la tension est extrêmement petit d'un ordre inférieur au déplacement vertical. L'action d'un vent faible ne produit donc qu'un petit déplacement horizontal dans le fil; cette action n'en élève pas sensiblement les points, et n'accroît pas sensiblement la tension.

250. Lorsque le plan dans lequel le fil se trouve contenu a été incliné par l'action du vent, ou par toute autre cause, ce fil oscille comme un pendule autour de la

ligne AB. La durée des oscillations, que la résistance de l'air n'altère pas, est proportionnelle à la racine carrée de la flèche f, et indépendante de la longueur h. Quant à la rapidité avec laquelle l'étendue de ces oscillations décroît par l'effet de la résistance de l'air, on sait que la quantité dont l'amplitude de chaque demi-oscillation diminue est proportionnelle à la longueur du pendule et au coefficient par lequel il faut multiplier le carré de la vîtesse pour avoir la résistance de l'air (*). Ce coefficient est ici évidemment proportionnel à h : ainsi, la grosseur du fil demeurant la même, la quantité dont l'amplitude de chaque demi-oscillation diminue est proportionnelle à hf. Et comme on donnera toujours aux chaînes des grosseurs d'autant plus considérables que h sera plus grand, on voit que la diminution progressive des amplitudes des oscillations croît beaucoup plus rapidement que la longueur des chaînes.

251. L'action du vent produit contre la face latérale du plancher une pression horizontale qui se trouve uniformément répartie sur toute la longueur. Si le plancher était parfaitement inflexible dans le sens horizontal, cette pression n'en changerait nullement la figure ; mais, à raison de l'imperfection de la liaison des parties et de l'élasticité des matériaux, le plancher peut céder un peu à l'action du vent. La manière dont il résiste à cette action peut être assimilée à celle dont résisterait une verge chargée par des poids uniformément répartis sur la longueur, et ayant les deux extrémités fixes. Ainsi, conformément aux lois connues de la résistance d'une semblable verge, le plancher doit se courber un peu dans le sens horizontal ; et, toutes choses égales d'ailleurs, la flèche de la courbure, ou le déplacement horizontal du point du milieu, sera proportionnel à $\frac{h^3}{l^2}$, en nommant toujours h la demi-longueur du plancher, et désignant par l sa largeur horizontale. Par conséquent ce déplacement croîtrait comme le cube de l'ouverture des arches, si, en augmentant cettte ouverture, on n'augmentait pas la largeur des planchers ; ou si, en fortifiant la construction, on ne les rendait pas moins susceptibles de fléchir. L'expérience apprend d'ailleurs, comme on l'a vu dans la première partie de ce Mémoire (articles 56, 69), que des planchers dont la construction est très-légère, dans lesquels il n'existe aucune pièce dirigée diagonalement, et dont la largeur est seulement le vingtième ou même le cinquantième de l'ouverture des travées, ne se courbent pas sensiblement sous l'action d'un vent assez fort. On peut donc regarder la flexion horizontale à laquelle sont exposés les planchers par l'action du vent, comme tout-à-fait nulle ou insensible, au moins dans les limites des dimensions des ponts suspendus qui ont été exécutés ou projetés jusqu'à présent.

252. Le mouvement que le vent imprime aux chaînes se transmet au plancher par les tiges de suspension. Les chaînes tendent à se courber horizontalement ; et comme

(*) *Voyez* le *Traité de mécanique* de M. Poisson, tome I.er, page 411.

le plancher ne se courbe pas sensiblement, le déplacement horizontal des chaînes ne peut avoir lieu sans que, à parler rigoureusement, le plancher ne se trouve un peu soulevé. On doit remarquer toutefois qu'un déplacement horizontal très-petit de la chaîne ne peut causer dans le plancher qu'un soulèvement très-petit d'un ordre inférieur : d'où il suit que, tant que la chaîne n'éprouve que de petits balancemens, l'étendue de ces balancemens doit s'estimer en mettant pour p dans la valeur de f'', article 249, non pas le poids total dont la chaîne est chargée, parce qu'alors la charge du plancher ne se fait presque pas sentir, mais seulement le poids de la chaîne. On voit, d'après cette remarque, que la chaîne peut se déplacer avec beaucoup de facilité, tant que les oscillations sont très-faibles ; mais qu'aussitôt que ces oscillations tendent à prendre plus d'étendue, elles se trouvent bornées par suite de l'action du poids du plancher. Nous avons effectivement vu, dans le pont du Tweed, les chaînes affectées d'un balancement horizontal presque continuel, mais renfermé dans des limites très-resserrées.

§. XIII.

De l'équilibre des ponts suspendus, en ayant égard au poids des chaînes et des tiges de suspension.

253. Nous avons établi, dans le paragraphe premier, les conditions de l'équilibre des chaînes, en supposant que le poids dont elles sont chargées est uniformément distribué sur la ligne horizontale placée au-dessous de ces chaînes. Cette supposition n'est pas exactement conforme à ce qui a véritablement lieu dans les ponts suspendus, quoiqu'elle en approche beaucoup plus que toute autre hypothèse également simple. En effet, le poids du plancher est le seul que l'on puisse véritablement considérer comme distribué uniformément sur la ligne horizontale liée aux chaînes ; le poids des chaînes et celui des tiges de suspension sont distribués de manière que des parties égales de cette ligne s'en trouvent d'autant plus chargées qu'elles sont situées plus loin du milieu de l'arche. Cette altération dans la distribution de la charge, admise dans toutes les recherches précédentes, est très-faible dans la presque totalité des applications (ainsi qu'il est aisé de s'en assurer), soit à raison du peu d'amplitude de la courbure des chaînes, soit parce que le poids des chaînes et celui des tiges de suspension ne forme qu'une petite partie de la charge totale ; et tous les résultats de ces recherches peuvent être admis avec confiance. Cependant, il est utile de connaître le petit changement que subirait, après l'exécution, la courbe des chaînes, à laquelle on aurait attribué la figure parabolique qui suppose la distribution de la charge tout-à-fait uniforme : cette connaissance permettra de régler d'avance les longueurs des tiges de suspension, avec la certitude

que le plancher prendra exactement la figure qu'on aura voulu lui donner, lorsque, la construction étant abandonnée à elle-même, la courbure des chaînes se réglera de manière à satisfaire aux conditions de l'équilibre.

En regardant le changement dont il s'agit comme une altération légère de la courbe parabolique, on le connaîtra fort simplement de la manière suivante.

254. Reprenons les équations (*a*) et (*b*), article 95, qui expriment l'existence de l'équilibre dans un fil parfaitement flexible, chargé d'une manière arbitraire. En les divisant l'une par l'autre, nous aurons

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P}{Q} + \frac{1}{Q}\int_x^a dx'.p';$$

et si nous différencions cette équation par rapport à x, il viendra

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p}{Q};$$

ce qui apprend que le caractère géométrique des courbes suivant lesquelles un fil chargé par des poids doit se plier, consiste en ce que le coefficient différentiel du second ordre de l'ordonnée est égal à la fonction p de l'abscisse qui donne la valeur du poids placé en chaque point du fil, cette fonction étant divisée par la tension horizontale Q, et prise avec un signe contraire.

Dans tous les paragraphes précédens, nous avons toujours considéré p comme une constante, mais à présent nous regarderons cette quantité comme une fonction de x composée de trois parties ; savoir : une constante, qui forme la plus grande portion de la valeur ; une deuxième partie, relative au poids des tiges de suspension ; et une troisième, relative au poids des chaînes. Et comme nous savons que la figure des chaînes doit différer très-peu de la courbe parabolique qu'elles affectent lorsque p est constant, nous supposerons, pour évaluer les deux dernières parties variables de p, que cette figure est effectivement une parabole. Soit donc AOB (fig. 28, pl. XI) la parabole dont il s'agit, et supposons les abscisses horizontales et verticales x et y comptées du sommet O. En désignant toujours par h et f la demi-corde AC et la flèche CO, l'équation de la courbe sera l'équation (15), article 113,

$$y = \frac{fx^2}{h^2}.$$

255. Cela posé, nommons τ le poids total des tiges de suspension placées dans l'intervalle OP qui répond à une des moitiés de la courbe. Ces tiges sont des ordonnées telles que mp, et elles sont espacées à certaines distances ; mais il est évident que la manière dont elles influent sur la figure de la courbe ne changera pas sensiblement si,

sans en faire varier le poids total, on les rendait plus nombreuses en les plaçant très-près les unes des autres. On voit donc que l'on peut regarder le poids des tiges comme distribué sur tous les points de la ligne OP, en supposant le poids placé dans chaque point p proportionnel à l'ordonnée mp placée en ce point. Il s'agit seulement d'attribuer au poids placé sur chaque élément infiniment petit pq de cette ligne, une valeur telle que la somme de tous les poids compris dans l'intervalle OP soit égale à τ. Cette condition sera remplie, si l'on représente le poids placé sur pq par $dx.\frac{3\tau x^2}{h^3}$; car, en prenant l'intégrale de cette quantité depuis $x = 0$ jusqu'à $x = h$, on trouvera τ. La portion de la fonction p de x qui se rapporte au poids des tiges sera donc $\frac{3\tau x^2}{h^3}$.

256. A l'égard de la partie de cette fonction qui se rapporte au poids des chaînes, en appelant σ le poids de l'unité de longueur de ces chaînes, on aura $dx.\sigma\sqrt{1+\frac{4f^2x^2}{h^4}}$ pour le poids de l'élément mn qui est supporté par l'élément pq de OP; et par conséquent la portion cherchée de la fonction p sera $\sigma\sqrt{1+\frac{4f^2x^2}{h^4}}$.

257. Il résulte de ce qui précède qu'en nommant π la partie constante de p, qui représente le poids du plancher pour une unité de longueur, nous aurons

$$p = \pi + \tau\frac{3x^2}{h^3} + \sigma\sqrt{1+\frac{4f^2x^2}{h^4}}; \qquad (1)$$

et si nous substituons cette expression dans l'équation différentielle du second ordre trouvée article 254 (dans laquelle, d'après la manière dont nous comptons actuellement les coordonnées, le signe du second membre doit être changé), nous aurons

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{Q}\left(\pi + \tau\frac{3x^2}{h^3} + \sigma\sqrt{1+\frac{4f^2x^2}{h^4}}\right),$$

ou, en développant le radical,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{Q}\left[\pi + \tau\frac{3x^2}{h^3} + \sigma\left(1 + \frac{2f^2x^2}{h^4} - \frac{2f^4x^4}{h^8} + \frac{4f^6x^6}{h^{12}} - \frac{10f^8x^8}{h^{16}} + \&c.\right)\right].$$

Intégrant cette équation, il vient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{Q}\left[\pi x + \tau\frac{x^3}{h^3} + \sigma\left(x + \frac{2f^2x^3}{3h^4} - \frac{2f^4x^5}{5h^8} + \frac{4f^6x^7}{7h^{12}} - \frac{10f^8x^9}{9h^{16}} + \&c.\right)\right];$$

et il n'y a point de constante à ajouter, puisque l'on doit avoir en même temps $x = 0$ et $\frac{dy}{dx} = 0$ au point O.

En intégrant une seconde fois, on aura

$$y = \frac{1}{Q}\left[\frac{\pi x^2}{2} + \frac{\tau x^4}{4h^3} + \sigma\left(\frac{x^2}{2} + \frac{2f^2x^4}{3.4h^4} - \frac{2f^4x^6}{5.6h^8} + \frac{4f^6x^8}{7.8h^{12}} - \frac{10f^8x^{10}}{9.10h^{16}} + \&c.\right)\right],$$

où il n'y a pas non plus de constante à ajouter, parce que l'on a $y = 0$ au point O. Cette équation revient à

$$y = \frac{1}{Q}\left[\frac{\pi x^2}{2} + \frac{\tau x^4}{4h^3} + \frac{\sigma x^2}{2} + \sigma f^2\left(\frac{2x^4}{3.4h^4} - \frac{2f^2x^6}{5.6h^8} + \frac{4f^4x^8}{7.8h^{12}} - \frac{10f^6x^{10}}{9.10h^{16}} + \&c.\right)\right], \quad (2)$$

et on peut la regarder comme représentant à très-peu près la véritable figure de la courbe.

258. Si l'on y fait $x = h$, elle donnera l'expression de l'ordonnée AP, ou de la flèche CO, que nous désignons par f. On aura donc

$$f = \frac{1}{Q}\left[\frac{\pi h^2}{2} + \frac{\tau h}{4} + \frac{\sigma h^2}{2} + \sigma f^2\left(\frac{1}{6} - \frac{f^2}{15h^2} + \frac{f^4}{14h^4} - \frac{f^6}{9h^6} + \&c.\right)\right]: \quad (3)$$

le second membre de cette équation représente la valeur que prend la flèche de la courbure des chaînes par l'effet de la modification qu'éprouve la courbe parabolique; et il est visible que l'on doit y mettre, à la place de f, la valeur attribuée primitivement à cette flèche.

259. Dans la presque totalité des applications, il suffira de prendre les deux premiers termes de la série dans les formules précédentes. On aura ainsi

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{Q}\left[(\pi+\sigma)x + \left(\tau + \frac{2\sigma f^2}{3h}\right)\frac{x^3}{h^3}\right], \\ y &= \frac{1}{2Q}\left[(\pi+\sigma)x^2 + \left(\tau + \frac{2\sigma f^2}{3h}\right)\frac{x^4}{2h^3}\right], \\ f &= \frac{1}{2Q}\left[(\pi+\sigma)h^2 + \frac{\tau h}{2} + \frac{\sigma f^2}{3}\right]. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

On déduit de la dernière de ces équations

$$Q = \frac{1}{2f}\left[(\pi+\sigma)h^2 + \frac{\tau h}{2} + \frac{\sigma f^2}{3}\right] \quad (5)$$

pour l'expression de la tension horizontale; et comme, en nommant toujours α l'angle que la courbe forme au point A avec l'horizon, on a $\frac{dy}{dx} = \text{tang.}\,\alpha$ lorsque $x = h$, la valeur de tang. α est ici

$$\text{tang.}\,\alpha = \frac{1}{Q}\left[(\pi+\sigma)h + \tau + \frac{2\sigma f^2}{3h}\right], \text{ ou tang.}\,\alpha = \frac{2f}{h}\cdot\frac{(\pi+\sigma)h + \tau + \frac{2\sigma f^2}{3h}}{(\pi+\sigma)h + \frac{\tau}{2} + \frac{\sigma f^2}{3h}}. \quad (6)$$

260. Dans les applications on se donne ordinairement la demi-corde h et la flèche f. Les valeurs de ces quantités étant substituées dans l'équation (5), on connaîtra la tension horizontale Q, et l'expression (4) de y donnera les ordonnées de tous les points de la courbe. Si l'on veut connaître la demi-longueur de cette courbe, on pourra la calculer avec une exactitude suffisante par la formule

$$c = \int_0^h dx \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{dy^2}{dx^2}\right);$$

d'où l'on déduit, en substituant pour $\frac{dy}{dx}$ la valeur (4),

$$c = h + \frac{1}{2Q^2}\left[(\pi+\sigma)^2 \frac{h^3}{3} + 2(\pi+\sigma)\left(\tau + \frac{2\epsilon f^2}{3h}\right)\frac{h^4}{5} + \left(\tau + \frac{2\epsilon f^2}{3h}\right)^2 \frac{h^5}{7}\right],$$

ou, en remplaçant Q par la valeur (5),

$$c = h\left\{1 + \frac{2f^2}{3h^2} \cdot \frac{(\pi+\sigma)^2 h^2 + (\pi+\sigma)\left(\tau + \frac{2\epsilon f^2}{3h}\right)\frac{6h}{5} + \left(\tau + \frac{2\epsilon f^2}{3h}\right)^2 \cdot \frac{3}{7}}{(\pi+\sigma)^2 h^2 + (\pi+\sigma)\left(\tau + \frac{2\epsilon f^2}{3h}\right) h + \left(\tau + \frac{2\epsilon f^2}{3h}\right)^2 \cdot \frac{1}{4}}\right\},$$

expression qui différera extrêmement peu, dans les applications, de

$$c = h\left\{1 + \frac{2f^2}{3h^2}\left(1 + \frac{3\tau h + 2\epsilon f^2}{15(\pi+\sigma)h^2}\right)\right\}. \qquad (7)$$

Ainsi, comme il était aisé de le prévoir, la longueur de la courbe, en supposant à h et f les mêmes valeurs, est ici plus grande que la longueur de la courbe parabolique, pour laquelle on a simplement, d'après l'équation (22), article 114, $c = h\left(1 + \frac{2f^2}{3h^2}\right)$.

261. On en conclut que si, en construisant un pont, on avait donné aux chaînes la figure parabolique admise dans les recherches précédentes, cette figure se modifierait, quand la construction se trouverait ensuite abandonnée à elle-même, de manière que la courbure des chaînes augmenterait près des extrémités et diminuerait au milieu, ce qui ferait élever le milieu du plancher. Nommons f la flèche de courbure des chaînes en supposant une figure parabolique, et f' la même flèche quand la courbure est modifiée de la manière dont il s'agit ici : on connaîtra la relation entre f et f' en posant l'équation

$$1 + \frac{2f^2}{3h^2} = 1 + \frac{2f'^2}{3h^2}\left(1 + \frac{3\tau h + 2\epsilon f'^2}{15(\pi+\sigma)h^2}\right),$$

d'où l'on déduit, à très-peu près,

$$f' = f\left(1 - \frac{3\tau h + 2\epsilon f^2}{30(\pi+\sigma)h^2}\right). \qquad (8)$$

On pourra vérifier, en appliquant cette formule, que la différence entre f' et f sera toujours extrêmement petite, et d'autant plus que l'ouverture des arches sera plus grande. Il était toutefois utile de s'assurer exactement de l'étendue de cette différence, et il conviendra, en faisant le tracé d'un pont, de calculer les ordonnées de la courbe et les longueurs des tiges de suspension d'après l'expression (4) de y, article 259, plutôt que d'après l'équation de la parabole $y = \frac{fx^2}{h^2}$, parce que les ordonnées des points situés vers le quart et les trois quarts de la longueur du plancher doivent différer davantage entre elles, dans les deux courbes, que ne le font les ordonnées situées au milieu de cette longueur; on n'aura alors à craindre, après la construction, aucun changement, si ce n'est ceux provenant de l'allongement des chaînes par suite de la tension qu'elles supporteront et des variations de la température; changemens dont il a été question dans les paragraphes VII et IX: mais ces dernières modifications affectent les ordonnées de la courbe d'une manière régulière et progressive, depuis les extrémités de l'arche jusqu'au milieu. Elles font varier seulement les longueurs de ces ordonnées, qui ne cessent point d'être représentées par l'équation (4).

§. XIV.

Examen succinct des principales dispositions qui peuvent être adoptées pour les ponts suspendus. Limites de l'ouverture des arches.

262. Le cas le plus simple (fig. 29, pl. XI) est celui où le pont devrait être établi dans un vallon resserré entre des rochers, qui offriraient des points fixes A, B, à une hauteur suffisante, pour attacher les chaînes. Si la longueur du vallon surpasse 150 ou 200 mètres, et si la profondeur est considérable, l'emploi des chaînes offre non-seulement le procédé le plus économique, mais presque le seul praticable pour l'établissement d'un pont.

263. Si le vallon n'était escarpé que d'un côté, et offrait de l'autre un terrain horizontal, on pourrait employer la disposition indiquée figure 30, ce qui dispenserait de construire un support en B. Plus le point d'attache A sera élevé, moins les chaînes seront tendues. Pour qu'elles le soient le moins possible, il faut que la courbe AB soit telle que la tangente en B soit horizontale. Alors la tension des chaînes sera égale à celle qui aurait lieu dans une arche complète, semblable à celle de la figure 29, mais dont l'ouverture serait double de celle de l'arche représentée figure 30. Par conséquent, si l'on construisait un support en B, dont la hauteur fût égale à PA, en sorte que le pont offrît la disposition indiquée par les lignes ponctuées, on réduirait à moitié la tension des

chaînes, et par conséquent la dépense qu'elles occasionneraient; économie qui devra être mise en balance avec la dépense du support et des chaînes de retenue. On n'est pas obligé d'ailleurs de donner au support établi en B une hauteur égale à PA, et en essayant diverses hauteurs, on en trouvera une telle qu'il y aurait du désavantage à l'augmenter ou à la diminuer. La figure et la tension des chaînes, lorsque le pont n'est point composé de deux moitiés égales, se déterminent au moyen des formules des articles 109 et suivans.

Il peut se trouver, dans les deux cas dont il vient d'être question, un intervalle considérable entre l'extrémité A de la chaîne et le point M où elle commence à être chargée par le poids du plancher. Lorsque cet intervalle est petit, la chaîne n'y prend pas une courbure sensible, et on peut regarder AM comme le prolongement de la tangente à la courbe de la chaîne au point M. A parler rigoureusement, la chaîne prendra toujours, dans l'intervalle dont il s'agit, une courbure due à l'action de la pesanteur. Si l'on veut avoir égard à cette courbure, et se rendre compte exactement de la figure qu'affectera cette chaîne, on y parviendra facilement à l'aide des principes employés dans le paragraphe II. En ayant égard aux charges différentes que supportent les diverses parties des chaînes, charges que l'on pourra, sans erreur sensible, supposer distribuées uniformément sur les lignes horizontales qui correspondent à chacune de ces parties, on calculera d'abord, comme on l'a fait dans ce paragraphe, les coordonnées des points extrêmes de chaque partie, et les inclinaisons des élémens de la courbe en ces points. Les formules du paragraphe I.er donneront ensuite séparément les figures de chacune des portions de courbe dont il s'agit.

264. Lorsque les deux rives du vallon sur lequel le pont est établi n'offrent pas de points d'attache pour les chaînes à une hauteur suffisante, on est obligé de soutenir les chaînes par des supports; et, à moins que l'on ne donne à ces supports une grande épaisseur, on doit les consolider par des chaînes de retenue. Cette disposition (fig. 31, pl. XI) a l'avantage de laisser entièrement libres le lit de la rivière et les bords; en sorte qu'elle n'apporte aucun obstacle à la navigation, et ne gêne point la circulation sur les quais, les voitures pouvant passer sous les chaînes de retenue.

265. Si la rivière n'est pas très-profonde, et si la construction des piles n'offre pas de difficultés, on peut trouver de l'économie à modifier la disposition précédente en avançant les supports dans la rivière, comme l'indique la figure 32. En effet, l'arche, ayant moins d'ouverture, exige des supports moins élevés et des chaînes moins fortes, et la longueur des chaînes est moins grande. L'épargne qui en résulte peut compenser l'augmentation de dépense provenant de ce que les supports sont construits dans le lit de la rivière, et des changemens qu'il faudra apporter aux constructions servant à fixer les extrémités des chaînes.

Si l'on adoptait cette disposition, le poids des portions du plancher suspendues aux chaînes de retenue obligerait ces chaînes à prendre une courbure. On en connaîtrait la figure au moyen de l'équation (2), article 109, en y mettant pour tang. α la valeur donnée par la formule (5), article 110, et pour Q la tension horizontale que doivent supporter les chaînes de retenue, conformément à ce qui a été dit dans les paragraphes III et IX.

266. En éloignant davantage les supports des bords de la rivière, on se rapprochera de la disposition représentée fig. 33, pl. XI, d'après laquelle le pont se trouve composé d'une arche et de deux demi-arches, égales chacune à la moitié de celle-ci. Cette disposition est celle du pont projeté à Runcorn, sur la Mersey, par M. Telford (article 23). Dans les ponts de ce genre, les portions d'arche qui accompagnent l'arche du milieu étant égales ou non à la moitié de celle-ci, on peut, en réglant convenablement la courbure des chaînes dans ces portions d'arche, faire en sorte que les supports ne se trouvent exposés à aucune action horizontale, par l'effet de la charge permanente du poids des chaînes et du plancher. Il suffira, pour remplir cette condition, de rendre égales les tensions horizontales des chaînes de chaque côté des supports. Pour que cette égalité ait lieu, il n'est pas nécessaire que le plancher du pont soit de niveau, ni même que les extrémités des chaînes se trouvent placées sur la même ligne horizontale que le sommet de l'arche du milieu. Mais les supports seront toujours exposés à être sollicités horizontalement, dans le cas où le plancher se trouverait plus chargé par les voitures ou les passagers d'un côté du support qu'il ne l'est de l'autre côté : il faudra donc nécessairement procurer à ces supports une stabilité suffisante pour résister à cette action horizontale, conformément à ce qu'on a vu dans le paragraphe IV.

267. La nécessité de rendre les supports capables de résister aux accroissemens de tension provenant des surcharges accidentelles, se retrouve dans le pont représenté fig. 34, pl. XI, formé de deux portions d'arche égales, soutenues par un seul support placé au milieu de la rivière. Cette dernière disposition a été adoptée par M. Brunel dans l'un des ponts destinés à l'île de Bourbon (article 74), et cet habile ingénieur paraît se proposer de l'appliquer à des constructions plus importantes. La tension des chaînes, si l'on en règle la courbure de manière que la tangente aux extrémités inférieures soit horizontale, n'est pas plus grande ici qu'elle ne le serait dans le cas où, la hauteur des supports demeurant la même, le pont serait disposé comme le représente la figure 31. Par conséquent, la disposition dont il s'agit épargne un support et une partie des chaînes de retenue. Cette économie est compensée par l'accroissement de dépense provenant de ce que le support est établi au milieu de la rivière, ce qui doit en rendre généralement la fondation plus coûteuse, et de ce qu'il faut rendre ce

support capable de résister à l'action horizontale à laquelle il serait exposé, si la portion d'arche située d'un côté se trouvait plus chargée que celle située du côté opposé. On peut remarquer que l'action horizontale dont il s'agit, et la stabilité que l'on devra en conséquence donner au support, seront, toutes choses égales d'ailleurs, d'autant moindres, que les courbes des chaînes, dans les deux portions d'arche adjacentes, auront moins d'amplitude ou approcheront davantage de la ligne droite : mais la tension de ces chaînes augmenterait en raison de la diminution de la courbure, conformément aux résultats exposés articles 110 et 111. Un pont composé de deux moitiés d'arche, tel que le représente la figure 34, est, toutes choses égales d'ailleurs, plus ferme et plus rigide que le pont formé par une arche entière, représenté figure 31, pourvu que le support soit construit de manière à être absolument fixe.

268. En employant plusieurs arches, ou portions d'arche, on peut multiplier les combinaisons du genre de celles dont il vient d'être question. La hauteur des supports est rarement déterminée par les circonstances locales. On a vu, article 157, que les chaînes et les tiges de suspension causaient la moindre dépense possible lorsque la flèche de courbure des chaînes était à l'ouverture des arches dans le rapport de 1 à $2\sqrt{2}$. Mais on se trouverait conduit, en établissant les chaînes d'après ce résultat, à donner beaucoup trop d'élévation aux supports; il faut diminuer cette élévation, afin que la dépense des supports, réunie à celle des chaînes, soit la moindre possible. On ne doit pas oublier d'ailleurs que, plus la flèche des chaînes sera petite, plus la construction paraîtra ferme et rigide, lors du passage des voitures. Il paraît, d'après l'exemple des constructions exécutées, qu'il conviendra en général de donner à la courbe des chaînes une flèche comprise entre le dixième et le vingtième de la corde.

269. D'après l'article 156, la dépense des chaînes et des tiges de suspension est, dans les cas ordinaires des applications, à fort peu près proportionnelle à la fonction $\frac{ph^2}{f}$, p représentant la charge correspondante à l'unité de longueur de la construction, h la demi-corde de la courbe des chaînes, et f la flèche de cette courbe. Quand on fait croître l'ouverture d'une arche et la flèche de courbure dans le même rapport, la dépense du plancher augmente proportionellement à l'ouverture, mais la dépense des chaînes et des tiges augmente proportionnellement au carré de l'ouverture. Si l'on a une rivière à passer, dont la demi-largeur soit h, et que l'on fasse une seule arche, la dépense des chaînes et des tiges sera proportionnelle à $\frac{ph^2}{f}$: mais si l'on fait m arches, dont chacune aura pour demi-ouverture $\frac{h}{m}$, en réduisant également la hauteur des supports à $\frac{f}{m}$, la dépense dont il s'agit sera proportionnelle à $\frac{ph^2}{mf}$. Cette dépense sera donc beaucoup moindre ; et la comparaison entre l'économie résultant de l'emploi d'un plus grand

nombre d'arches et les frais de construction des piles et des supports intermédiaires, doit être regardée comme un des principaux élémens de l'établissement des ponts suspendus.

270. Nous avons toujours supposé les chaînes placées dans des plans verticaux, qui contiennent aussi les tiges de suspension. On peut disposer les chaînes de manière qu'elles offrent une courbure dans le sens horizontal, comme on en a vu un exemple dans le pont construit pour les personnes à pied, à Dryburgh sur le Tweed (article 29). Chaque chaîne, avec les tiges de suspension correspondantes, est alors contenue dans un plan incliné; la tension de cette chaîne augmente dans le rapport de l'unité au cosinus de l'angle que ce plan forme avec la verticale. Cet inconvénient ne paraît compensé par aucun avantage. Le seul objet que l'on puisse se proposer, en adoptant la disposition dont il s'agit, est de se précautionner contre les mouvemens qui pourraient être imprimés à la construction dans une direction horizontale et perpendiculaire à la longueur du plancher. En effet, un semblable mouvement, imprimé vers le milieu de cette longueur, pourrait alors être transmis en partie, par l'intermédiaire des chaînes, aux extrémités supérieures des supports. Il ne serait pas nécessaire pour cela que le plancher cédât autant à l'action qui produit ce mouvement, qu'il le serait dans le cas où les chaînes seraient contenues dans des plans verticaux. Mais on ne voit pas que cette espèce de liaison dans le sens horizontal, qui se trouverait ainsi établie entre le plancher et les extrémités supérieures des supports, puisse consolider sensiblement le plancher, tandis qu'elle peut au contraire diminuer la stabilité des supports.

271. L'expérience du pont construit près de Berwick, sur le Tweed, prouve qu'un plancher ayant 110 mètres de longueur sur $5^{m},5$ de largeur, formé simplement par des poutres transversales et des madriers cloués sur ces poutres, sans aucune pièce dirigée diagonalement, offre dans le sens horizontal, contre l'action du vent ou contre les secousses imprimées lors du passage des voitures, toute la rigidité nécessaire. D'après l'article 251, la composition du plancher demeurant la même, on obtiendra dans tout autre cas la même rigidité, en conservant le même rapport entre la longueur et la largeur du plancher. Il serait aisé d'ailleurs d'en augmenter considérablement la force, en faisant porter les madriers sur un grillage fortement assemblé, et dans lequel on placerait des pièces dirigées diagonalement. On pourrait aussi, dans des circonstances extraordinaires, rendre le pont moins flexible en augmentant la largeur du plancher vers le milieu de la longueur, conformément aux règles connues d'après lesquelles on détermine la figure des solides d'égale résistance. Nous n'insisterons pas davantage sur cet objet, et nous remarquerons seulement qu'il est toujours nécessaire de lier entre elles les parties du plancher dans le sens de la longueur, et d'en attacher fortement les extrémités à la masse des culées.

272. Supposons, comme nous l'avons fait jusqu'ici, le poids de la construction distribué uniformément sur une ligne droite horizontale. Représentons par ϖ le poids du plancher et des tiges de suspension pour une unité de longueur; par σ le poids de l'unité de volume, et par Ω l'aire de la section transversale des chaînes : le poids total de l'unité de longueur de la construction sera $\varpi + \sigma\Omega$. Dans une arche dont la demi-ouverture serait h, et la flèche f, la plus grande tension des chaînes de support serait exprimée, d'après la formule (19), article 113, par $(\varpi + \sigma.\Omega)\frac{h\sqrt{h^2+4f^2}}{2f}$. Par conséquent, si nous désignons par ϵ la plus grande tension à laquelle puisse être exposée l'unité superficielle de la section transversale des chaînes, nous aurons, pour déterminer la grandeur de cette section, l'équation

$$\epsilon.\Omega = (\varpi + \sigma.\Omega)\frac{h\sqrt{h^2+4f^2}}{2f}, \text{ d'où l'on déduit } \Omega = \frac{\varpi.h\sqrt{h^2+4f^2}}{\epsilon.2f - \sigma.h\sqrt{h^2+4f^2}}. \quad (1)$$

Cette expression montre que, si l'on est libre d'augmenter la hauteur des supports, on peut donner aux arches des ponts suspendus une ouverture aussi grande qu'on le voudra : en effet, quelque grande que soit h, on pourra toujours attribuer à f une valeur telle que l'expression (1) donne pour Ω une valeur finie.

273. Si la flèche de courbure f devait conserver toujours un rapport déterminé avec la demi-ouverture h, en sorte que l'on eût constamment $f = kh$, l'équation (1) se changerait en

$$\Omega = \frac{\varpi.h\sqrt{1+4k^2}}{\epsilon.2k - \sigma.h\sqrt{1+4k^2}};$$

et l'on aurait alors, pour la limite des valeurs de h,

$$h = \frac{\epsilon}{\sigma}.\frac{2k}{\sqrt{1+4k^2}}. \quad (2)$$

274. Le mètre étant l'unité linéaire, et les chaînes étant faites en fer forgé, on a $\varpi = 7788$ kilogrammes. En adoptant d'ailleurs la règle établie article 170, d'après laquelle on ne doit pas exposer cette matière à une tension qui dépasse 14 kilogrammes par millimètre carré de la section transversale, $\epsilon = 14\,000\,000$ kilogrammes. Ainsi, dans le cas des chaînes en fer, $\frac{\epsilon}{\sigma} = 1\,798$ mètres.

D'après cela, si l'on supposait, par exemple, la hauteur des supports constamment égale au $\frac{2}{15}$ de l'ouverture de l'arche, on déduirait de la formule (2) que cette ouverture doit nécessairement demeurer au-dessous de 927 mètres.

275. Admettons maintenant que le poids de la construction est distribué uniformément sur la longueur de la courbe. La plus grande tension des chaînes étant alors exprimée par l'équation (y), article 106, on aura, pour déterminer Ω,

$$\varepsilon.\Omega = (\varpi + \sigma.\Omega)\frac{c^2+f^2}{2f}, \text{ d'où l'on déduit } \Omega = \frac{\varpi(c^2+f^2)}{\varepsilon.2f - \sigma(c^2+f^2)}. \qquad (3)$$

La valeur de Ω devient infinie quand $c = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\sigma}.2f - f^2}$, ou $f = \frac{\varepsilon}{\sigma} + \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{\sigma^2} - c^2}$. La limite des valeurs de c est donc $c = \frac{\varepsilon}{\sigma}$, d'où $f = \frac{\varepsilon}{\sigma} = c$. On déduit alors de la formule (x), article 106, $h = 0$: ainsi les deux extrémités du fil sont rapprochées en un même point, et les deux moitiés pendent de ce point suivant une même ligne verticale. En substituant l'expression précédente de c en f dans l'équation (x), elle devient

$$h = -\left(\frac{\varepsilon}{\sigma} - f\right)\log.\frac{\sqrt{\frac{2\varepsilon}{\sigma} - f} + \sqrt{f}}{\sqrt{\frac{2\varepsilon}{\sigma} - f} - \sqrt{f}}. \qquad (4)$$

f peut être déterminé de manière à rendre cette valeur de h la plus grande possible ; et le double de la valeur *maximum* ainsi trouvée est la limite de l'ouverture d'une arche.

276. Pour faire une application de la formule (1), art. 272, supposons $h = 125$ mètres, $f = 8$ mètres, dimensions adoptées pour le pont suspendu qui avait été projeté sur le Rhin (article 17); et attribuons à la charge correspondante à l'unité de longueur du plancher, la valeur $4500^k = \varpi$. En substituant dans la formule (1) ces valeurs, et celles de ε et σ données dans l'article 274, on trouvera $\Omega = 0^{\text{m. car.}},6932$. D'après ce résultat, il eût été nécessaire de composer les chaînes de support d'une réunion de barres de fer équivalente à une pièce ayant plus de $0^{\text{m}},84$ d'écarrissage : le poids de ces chaînes aurait été d'environ 1 350 000 kilogrammes. La construction du pont, tel qu'il avait été projeté, était très-praticable ; mais elle aurait coûté beaucoup plus que ne le pensait l'auteur du projet, qui n'estimait qu'à 210 000 francs la dépense du réseau en fer sur lequel il faisait porter le plancher.

Supposons encore $h = 250$ mètres, $f = 30$ mètres. La formule (1), en attribuant toujours à ϖ, ε et σ les mêmes valeurs, donnera $\Omega = 0^{\text{m. car.}},8521$. Ainsi une arche de 500 mètres d'ouverture, avec des supports de 30 mètres de hauteur, exige des chaînes dont la section transversale ait un peu plus de $0^{\text{m}},92$ d'écarrissage : ces chaînes peseraient environ 3 500 000 kilogrammes. L'établissement d'une arche semblable ne comporterait donc pas une dépense excessive. Le pont paraîtrait très-ferme et très-rigide, lors du passage des voitures ; et l'on n'aurait rien à craindre des mouvemens horizontaux imprimés par les vents, pour un système de construction qui offre un équilibre stable, et qui se trouve ramené constamment dans la même situation par le seul effet des forces constantes à l'action desquelles ce système est soumis.

TROISIÈME PARTIE.

APPLICATIONS DES RECHERCHES PRÉCÉDENTES.

PROJETS D'UN PONT ET D'UN PONT-AQUEDUC SUSPENDUS.

277. L'OBJET que l'on s'est proposé dans cette troisième partie, est de répandre plus de clarté sur les recherches précédentes, et d'en faciliter les applications, en donnant un exemple des calculs nécessaires pour faire l'établissement des ponts suspendus, et pour apprécier les effets qui pourront se manifester dans ces ponts lors du passage des fardeaux mobiles, ou par suite des variations de la température. Nous sommes bien éloignés, d'ailleurs, de présenter les dispositions adoptées dans les projets qui vont être décrits, comme étant les plus parfaites : chaque ingénieur appréciera ces dispositions d'après ses propres lumières et son expérience, les perfectionnera ou en trouvera de plus avantageuses.

§. I.er

Pont suspendu projeté sur la Seine, à Paris.

278. Ce pont est représenté sur la planche XII : la figure 1 est l'élévation latérale; la figure 2, une section transversale faite au milieu du pont ; la figure 3, une portion du plan ; la figure 4 est le plan général de l'emplacement, qui est donné par le prolongement de l'axe de l'hôtel des Invalides dans la promenade des Champs-Élysées ; la figure 5 représente, sur une plus grande échelle, l'élévation latérale d'une portion du pont, au milieu de la longueur ; la figure 6 est une section transversale faite dans la même portion ; les figures 7, 8, 9 et 10, offrent les détails des chaînes.

L'ouverture du pont, entre les murs de quai, est de 150 mètres, et la distance entre les axes des colonnes sur lesquelles les chaînes sont supportées est de 170 mètres.

Il y a 32 mètres de distance entre ces axes et le milieu des piédestaux dans lesquels pénètrent les chaînes de retenue.

Les chaînes sont contenues dans deux plans verticaux éloignés l'un de l'autre de $9^{m},5$. La flèche de la courbure des chaînes de support est de 10 mètres pour l'ouverture de 150 mètres.

La surface supérieure du plancher est élevée de 9 mètres au-dessus des basses eaux sur les culées, et de $10^{m},5$ au milieu de la longueur du pont. La surface supérieure du massif de fondation des colonnes est située à $8^{m},5$ au-dessus du même niveau. La hauteur de la colonne, depuis ce massif jusqu'au-dessus du socle placé sur le chapiteau, est de $14^{m},5$.

279. La largeur du plancher est de $9^{m},5$ entre les plans verticaux passant par les milieux des chaînes, et contenant les tiges de suspension. L'espace compris entre les parapets est de $8^{m},7$: cet espace est partagé en deux passages ayant chacun $1^{m},5$ de largeur, pour les personnes à pied, et un passage au milieu pour les voitures, ayant $5^{m},7$ de largeur. Le plancher est formé par des madriers de $0^{m},1$ d'épaisseur, posés en travers sur des solives longitudinales ayant $0^{m},15$ de largeur et $0^{m},19$ d'épaisseur. Ces solives sont portées par des poutres transversales composées de trois pièces en fer fondu, formant une sorte de voûte, assujetties entre elles par des joints assurés par des boulons, et dont la poussée est retenue par un double tirant en fer forgé. L'aire de la section transversale de la principale pièce, dans la partie en fer fondu, est de $0^{m.q^{r.}},0095$: les deux pièces formant le double tirant ont chacune $0^{m},07$ de hauteur sur $0^{m},035$ d'épaisseur. Ces poutres transversales sont placées à $1^{m},667$ de distance les unes des autres.

Le passage des voitures est limité sur le plancher par des bouteroues en fer fondu, et revêtu de bandes de fer de $0^{m},007$ d'épaisseur.

Les parapets sont formés par des châssis rectangulaires en fer forgé, consolidés par des diagonales, et garnis d'un grillage en fil de fer : les fers ont $0^{m},027$ d'écarrissage.

280. Les chaînes de support sont formées chacune de neuf cours d'anneaux oblongs, ayant extérieurement $4^{m},9$ de longueur, et disposés sur trois rangs. Ces anneaux, en fer forgé de $0^{m},08$ sur $0^{m},04$ d'écarrissage, sont réunis par des boucles d'assemblage, également en fer forgé, de $0^{m},045$ sur $0^{m},04$ d'équarrissage, et par des boulons de $0^{m},1$ de diamètre, partagés en deux parties, entre lesquelles on peut insérer des cales, ce qui permet de régler facilement la longueur des chaînes. La somme des aires des sections transversales des fers, pour les deux chaînes de support, est de 115 200 millimètres carrés.

Les cours d'anneaux de chaque chaîne sont maintenus par des traverses en fer fondu, de $0^{m},04$ de largeur sur $0^{m},06$ de hauteur, entaillées à la rencontre des pièces des

chaînes, et serrées par des boulons. Ces traverses sont placées à chacun des points de suspension du plancher, et l'une d'elles, prenant dans le milieu la forme d'un rectangle arrondi, reçoit les extrémités supérieures des tiges. Au moyen de ces traverses, les neuf cours d'anneaux sont réunis en un faisceau, ayant $0^m,58$ de largeur sur $0^m,32$ de hauteur. La figure 7 représente l'élévation latérale d'un des assemblages des chaînes et des traverses voisines; la figure 8 est le plan du même assemblage, et la figure 9 est la section transversale de la chaîne. Les parties dont chaque cours d'anneaux est composé sont dessinées séparément dans la figure 10.

Les chaînes de retenue sont formées de la même manière que les chaînes de support, dont elles sont le prolongement : mais les fers des grands anneaux ont $0^m,047$ d'épaisseur, et ceux des boucles d'assemblage $0^m,052$ de largeur. La somme des aires des sections transversales des fers est, pour les deux chaînes de retenue, de 135 360 millimètres carrés.

281. Les tiges de suspension sont placées deux à deux, de chaque côté des poutres transversales : elles sont formées par des barres en fer rond, de $0^m,04$ de diamètre. Il y a quatre tiges pour $1^m,667$ de longueur du plancher. Ces pièces soutiennent, au moyen d'un étrier qui en forme l'extrémité inférieure, deux lisses en fer de $0^m,1$ de hauteur sur $0^m,03$ d'épaisseur, qui règnent dans toute la longueur du plancher et sur lesquelles portent les poutres transversales.

282. Les supports des chaînes sont formés par des colonnes en pierre de taille, élevées sur des massifs de maçonnerie fondés sur pilotis. Ces massifs ont 4 mètres de largeur dans le haut, et 6 mètres dans le bas. Les colonnes ont $3^m,3$ de diamètre sur le socle circulaire qui en forme la base, et $2^m,5$ à l'extrémité supérieure. Le diamètre du couronnement du chapiteau est de 4 mètres. Sur ce couronnement est placé un socle carré, dont la hauteur est d'un mètre. Dans le milieu de ce socle est encastrée une sorte de boîte en fer fondu, partagée par des cloisons, et destinée à recevoir les pièces des chaînes; le fond de cette boîte est courbé suivant un arc de cercle, et dans cette partie la chaîne est formée d'anneaux courts, assemblés par des boulons placés horizontalement.

La maçonnerie des colonnes est consolidée par une armature placée dans le plan vertical passant par les milieux des chaînes, et formée par de fortes pièces en fer fondu, encastrées dans le parement de la colonne depuis le dessus du massif de fondation jusqu'au chapiteau, et pénétrant dans l'épaisseur de ce chapiteau jusqu'au-dessous du fond de la boîte qui reçoit les chaînes. Des boulons en fer forgé traversent la colonne et relient ces pièces : elles sont prolongées par des ancres qui pénètrent dans le massif de fondation. Au moyen de cette armature, et d'après la disposition adoptée pour l'appareil des pierres qui composent la colonne, ces pierres se trouvent toutes assujetties fixement les unes aux autres.

Les colonnes sont réunies transversalement par des poutres en fer fondu, formées par des tuyaux rectangulaires d'une seule pièce, de $7^{m},8$ de longueur, et dont les extrémités pénètrent de $0^{m},4$ dans les socles placés sur les chapiteaux. Ces tuyaux ont extérieurement les mêmes dimensions que les faisceaux qui forment les chaînes : ils sont consolidés par une cloison verticale. L'épaisseur des faces horizontales est de $0^{m},03$; celle des faces verticales et de la cloison est de $0^{m},05$. Dans l'intérieur de ces poutres, qui empêchent les extrémités supérieures des colonnes de s'approcher, est placé un étrier en fer forgé, dont les branches ont $0^{m},05$ de diamètre, et qui embrasse extérieurement les socles placés sur les chapiteaux des colonnes, de manière à en prévenir l'écartement.

283. Les chaînes de retenue, après avoir pénétré dans les piédestaux, changent de direction, en s'appuyant contre une courbe en fer fondu, et descendent verticalement dans des puits en maçonnerie, au fond desquels l'extrémité est fixée. Cette extrémité, qui descend jusqu'à 2 mètres au-dessous du niveau des basses eaux, passe entre des pierres de taille encastrées dans la maçonnerie des puits, au-dessous desquelles il se trouve une forte armature en fer fondu : les derniers anneaux de la chaîne sont liés à cette armature. La partie supérieure de la maçonnerie du puits et le piédestal reposent sur les pierres dont on vient de parler; mais comme le poids de cette maçonnerie n'égale pas la tension à laquelle la chaîne peut être exposée, on a ajouté aux puits des appendices qui pénètrent dans les terres environnantes, et qui forment un rectangle de $18^{m},5$ de longueur sur $9^{m},5$ de largeur, dans lequel les deux puits voisins se trouvent compris. Le poids des terres portant sur ce rectangle, et l'adhérence de ces terres à celles qui les entourent, concourent à faire équilibre à la tension des chaînes.

Un contre-fort en maçonnerie, fondé sur pilotis, est placé de manière à résister à la pression considérable qui s'exerce au point où la chaîne change de direction, dans le sens de la résultante des tensions des deux parties de cette chaîne.

Après avoir décrit les principales parties du pont projeté, nous allons indiquer la charge supportée par les chaînes, et les calculs nécessaires pour s'assurer qu'elles offrent une force suffisante.

Charge correspondante à l'unité de longueur du plancher.

284. Cette charge se compose de deux parties distinctes : 1.° la charge permanente, provenant du poids de la construction ; 2.° les charges variables et momentanées, provenant du passage des hommes, des animaux et des voitures.

La charge permanente a été évaluée comme il suit :

1.° Grands chaînons en fer forgé, composant les deux chaînes dans la partie correspondante à l'intervalle de 150 mètres entre les murs de quai, partie dont la longueur est de 151m,76	134992k	169342k
Boucles d'assemblage des chaînons dans le même intervalle	14455.	
Boulons et clavettes	9536.	
Traverses en fer fondu pour les suspensions des tiges	10359.	
2.° Tiges de suspension		26734.
3.° Lisses longitudinales suspendues aux tiges, et supportant les poutres du plancher	7437.	388356.
Poutres en fer fondu et forgé	156330.	
Solives et madriers en bois de chêne	175119.	
Bouteroues en fer fondu, garniture du plancher en bandes de fer forgé, vis et clous	35000.	
Parapets	14470.	
POIDS TOTAL		584432.

Ce poids étant divisé par 150 donne, pour la charge correspondante à chaque mètre de longueur du plancher, 3896 kilogrammes.

285. A l'égard des charges passagères, l'objet que l'on doit se proposer est de fixer des limites que ces charges ne puissent dépasser. Pour évaluer d'abord la charge qui peut être produite par une grande affluence de personnes à pied, on remarquera que, dans une troupe rangée en bataille, chaque soldat occupe dix-huit pouces dans le rang, et deux pieds dans la file (*), ce qui répond, à très-peu près, à trois hommes sur un mètre carré. Comme des personnes qui cheminent librement dans un passage ouvert, ne sont jamais aussi serrées les unes contre les autres que des soldats rangés en bataille, et que, dans une foule en partie composée de femmes et d'enfans, le poids moyen de chaque personne ne peut s'élever à plus de 65 kilogrammes, on regardera 195 kilogrammes comme la plus grande charge que la foule puisse produire sur un mètre carré. La distance des parapets étant de 8m,7 (279), on trouve ainsi, pour chaque mètre de longueur du plancher, une charge de 1697 kilogrammes.

La charge produite par une troupe de cavalerie serait beaucoup au-dessous de la précédente : car un cheval occupant 3 mètres carrés, et pesant avec le cavalier et l'équipage 390 kilogrammes au plus, il n'en résulte sur chaque mètre carré qu'une charge de 130 kilogrammes. Il est inutile, d'après cela, d'examiner la charge produite par les bœufs ou autres animaux.

Quant aux voitures, la charge la plus considérable à laquelle le pont projeté se trouve exposé, est celle provenant des charrettes servant à transporter la pierre à Paris. Ces charrettes peuvent peser, d'après les réglemens, jusqu'à 8400 kilogrammes : elles sont alors tirées par quatre chevaux au moins, attelés à la file, et occupant un espace de 15 mètres, dont 6 mètres pour la charrette, compris le brancard, et 9 mètres pour

(*) *De la Défense des places fortes*, par M. Carnot, page 593.

les trois chevaux attelés en avant. Supposant que chaque cheval pèse 350 kilogrammes, et qu'il se trouve sur le pont deux files de charrettes dirigées en sens opposés, et ne laissant entre elles qu'un mètre d'intervalle, il en résultera, pour chaque mètre de longueur du plancher, un poids de 1245 kilogrammes, moindre que la charge trouvée ci-dessus, en sorte qu'on pourrait supposer encore les trottoirs occupés par un grand nombre de personnes à pied, sans dépasser cette dernière charge.

Il existe des chariots de roulage pouvant peser 11700 kilogrammes, attelés de six chevaux de front, qui produiraient un poids plus grand que le précédent; mais l'usage n'en est pas assez répandu pour que l'on puisse supposer que deux files de ces chariots chargés se trouvent en même temps sur un pont. La supposition faite précédemment sur les charrettes chargées de pierre conduit même évidemment à une limite dont la véritable charge demeurera toujours fort éloignée. Toute autre voiture de transport produira une charge moindre. Les voitures suspendues, par lesquelles on peut présumer que le pont projeté sera principalement fréquenté, en produisent de moindres encore. Une voiture de place, chargée de six personnes, pèse au plus, avec les chevaux et le cocher, 2250 kilogrammes, et occupe un espace de 6 mètres : deux files de voitures semblables, sans intervalle entre elles, ne produisent donc, sur chaque mètre de longueur, qu'une charge de 750 kilogrammes.

D'après ce qui précède, on regardera 1697 kilogrammes comme la plus grande surcharge qui puisse avoir lieu sur un mètre de longueur du plancher. Cette quantité étant ajoutée à la charge permanente trouvée dans l'article précédent, donnera 5593 kilogrammes pour la limite de la charge totale correspondante à cette longueur.

Résistance des tiges de suspension.

286. Pour évaluer l'effort exercé sur ces pièces, on ne doit pas comprendre le poids des chaînes dans la charge permanente. Cette charge se réduit alors, pour un mètre de longueur du plancher, à 2767 kilogrammes; et en ajoutant 1697 kilogrammes, on trouve 4464 kilogrammes pour la limite de la charge totale. Le poids correspondant à l'intervalle de $1^m,667$, qui forme l'espacement des poutres transversales, est donc de 7441 kilogrammes. Comme ce poids est supporté par quatre tiges ayant chacune $0^m,04$ de diamètre, chaque millimètre carré de la section transversale soutient seulement un effort de $1^k,48$. Ces tiges pourraient être jugées trop fortes, si l'on n'avait point égard aux effets des secousses résultant du passage des voitures.

Résistance des chaînes.

287. Nous nous occuperons en premier lieu des chaînes de support. En considérant la partie de ces chaînes correspondante à la longueur du plancher, et conservant les dénominations employées dans la deuxième partie de ce Mémoire, nous avons ici :

La moitié de la corde de la courbe des chaînes....... $h = 75^m$.
La flèche de cette courbe...................... $f = 10^m$.
La moitié de la longueur de la même courbe........ $c = 75^m,88$.
La tangente de l'angle des extrémités supérieures de la courbe avec l'horizon........................... $\text{tang.}\,\alpha = \frac{2f}{h} = 0,2667$.
d'où................................... $\alpha = 10° 28' 9''$.
La charge correspondante à l'unité de longueur du plancher.................................. $p = 5\,593^k$.

En substituant ces valeurs dans la formule (17), article 113, on trouvera

$$Q = \frac{ph^2}{2f} = 1\,573\,030 \text{ kilogrammes}$$

pour la valeur de la tension horizontale des chaînes ; et d'après la formule (10), article 111,

$$T = \frac{Q}{\cos.\alpha} = 1\,599\,660 \text{ kilogrammes}$$

pour la valeur de la tension des chaînes aux extrémités supérieures, point où elle est la plus grande possible.

D'après les dimensions des chaînes, indiquées article 280, la somme des aires des sections transversales des fers est, pour les deux chaînes, de 115 200 millimètres carrés. Par conséquent chaque millimètre carré de ces sections supporte, par l'effet de la tension T, un effort $= \frac{1\,599\,660}{115\,200} = 13^k,89$. Cet effort répond à une limite que la charge placée sur le plancher du pont ne peut dépasser, et l'on voit que les dimensions des chaînes se trouvent ici déterminées conformément à la règle établie article 170.

288. Si l'on veut connaître l'action exercée sur les chaînes par le seul effet du poids de la construction, on devra supposer dans les formules précédentes $p = 3896$ kilogrammes. On trouve alors

$$Q = 1\,095\,750 \text{ kilogrammes}, \quad T = 1\,114\,300 \text{ kilogrammes};$$

et l'effort correspondant à la tension T, supporté par chaque millimètre carré de la section transversale des fers, est $9^k,67$. Cet effort n'est donc pas le quart du poids nécessaire pour causer la rupture.

289. La résistance des chaînes de retenue peut être considérée dans deux hypothèses différentes, savoir, en regardant les colonnes comme libres de fléchir ou de se déverser, ou en les regardant comme des supports fixes. Nous ajouterons ici aux données numériques contenues dans l'article 287,

La distance horizontale des extrémités de la partie des chaînes de retenue, comprise entre les colonnes et les puits, $a = 31^m,2$.

La tangente de l'angle formé avec l'horizon par la ligne qui joint les extrémités de cette partie des chaînes de retenue.................................... $\text{tang.}\,\omega = \frac{13,1}{31,2} = 0,41987$.

d'où.................................... $\omega = 22° \, 46' \, 34''$.

Le poids des chaînes de retenue sur un mètre de longueur, $\sigma = 1230^k$.

Si l'on regarde les colonnes comme des supports susceptibles de fléchir ou de se déverser sans opposer de résistance, la tension qui s'établira dans les chaînes de retenue doit être telle que la composante horizontale de cette tension soit égale à celle de la tension des chaînes de support. Ainsi la tension dont il s'agit est donnée par la formule (1), article 125,

$$R = \frac{Q}{\cos.\omega} = 1706060 \text{ kilogrammes},$$

en mettant pour Q la valeur trouvée article 287.

Si l'on regarde les colonnes comme absolument fixes, et si l'on suppose que, les chaînes de retenue s'allongeant, ces chaînes, à l'endroit où elles portent sur les colonnes, soient prêtes à glisser du côté des chaînes de support, la tension des chaînes de retenue sera égale, conformément à l'article 130, à la tension T qui a lieu à l'extrémité supérieure des chaînes de support, diminuée par l'effet du frottement sur les courbes d'appui. En supposant au contraire que, les chaînes de retenue s'accourcissant, le glissement tende à s'opérer dans le sens opposé, la tension de ces chaînes sera égale à celle des chaînes de support, augmentée par l'effet du frottement sur les courbes d'appui. Dans ces deux hypothèses, la valeur de la tension des chaînes de retenue, en supposant le rapport du frottement à la pression $\varphi = 0,28$, conformément à ce qui a été trouvé par Coulomb, pour le fer glissant sur le fer sans enduit, se trouve exprimée respectivement par

$$R = T.e^{-\varphi.\pi\frac{\alpha+\omega}{180°}} = 1\,359\,800 \text{ kilogrammes};$$

$$R = T.e^{\varphi.\pi\frac{\alpha+\omega}{180°}} = 1\,881\,850 \text{ kilogrammes},$$

en mettant pour T la valeur trouvée article 287. Dans la réalité, les colonnes ne sont pas absolument fixes; elles peuvent fléchir un peu : mais l'existence de cette flexion n'apporte aucun changement aux valeurs précédentes, qui doivent être regardées comme deux limites entre lesquelles la tension des chaînes de retenue demeurerera constamment comprise.

Il résulte de ce qui précède que, lors des légères variations de longueur qui pourront survenir dans les chaînes de retenue (variations qui seront appréciées ci-après), soit que la colonne fléchisse, soit qu'elle demeure fixe, les chaînes glissant sur les courbes d'appui, la tension de ces chaînes ne pourra dépasser 1 881 850 kilogrammes. On pourrait même diminuer cette limite, en ayant soin de polir la surface des fers en contact, et d'y entretenir un enduit. D'après les dimensions des fers des chaînes de retenue, article 280, la somme des aires des sections transversales des pièces de ces chaînes est 135 360 millimètres carrés : ainsi chaque millimètre carré ne peut supporter une tension qui surpasse $\frac{1\,881\,850}{135\,360} = 13^{k},88$. Les chaînes de retenue sont donc projetées, aussi bien que les chaînes de support, conformément à la règle établie article 170.

Les parties des chaînes de retenue qui pénètrent verticalement dans les puits sont nécessairement moins tendues que les parties inclinées de ces chaînes : on a cependant donné aux unes et aux autres les mêmes dimensions.

Stabilité et résistance des colonnes et des puits.

290. La stabilité des colonnes peut être vérifiée dans les deux hypothèses indiquées article 289. En supposant en premier lieu les chaînes fixées sur les extrémités supérieures des colonnes comme elles devraient l'être sur des poteaux susceptibles de se déverser librement, la condition nécessaire pour que le déversement ne puisse avoir lieu, est que la composante horizontale de la tension des chaînes de retenue soit égale à la composante horizontale de la tension des chaînes de support. Or la première des valeurs de R calculées dans l'article précédent représente la tension que supporteraient les chaînes de retenue, dans le cas où cette condition serait remplie; et comme on a vu dans le même article que ces chaînes ont une force plus grande qu'il ne serait nécessaire pour les mettre à même de résister à cette tension, on doit conclure que, dans la supposition dont il s'agit, les colonnes ne pourraient être renversées.

Admettons ensuite que la chaîne, reposant simplement sur la courbe d'appui, peut glisser le long de cette courbe; nous regarderons alors la colonne comme un corps posé sur un plan horizontal, et soumis à l'action de deux forces, qui sont les tensions des deux parties de la chaîne. D'après la remarque faite article 135, ce corps ne pourra jamais être renversé si la valeur de R donnée par la formule (16), article 133, est au moins égale à $\frac{Q}{\cos. \omega}$. Ces deux valeurs ont été calculées dans l'article précédent : la première est 1 881 850 kilogrammes, et la seconde 1 706 060 kilogrammes; ainsi la condition de stabilité dont il s'agit est satisfaite. Nous remarquerons toutefois que l'expression de la première de ces valeurs contient un élément sur l'évaluation duquel il reste quelque incertitude : cet élément est le rapport φ du frottement à la pression, et en le supposant de plus en plus petit, la valeur dont il s'agit diminue. En supposant $\varphi = 0$, c'est-à-dire que la chaîne peut glisser sans frottement sur la courbe d'appui (supposition la plus désavantageuse possible pour la stabilité de la colonne), la tension R des chaînes de retenue est égale à la tension T des chaînes de support, c'est-à-dire, égale à 1 599 660 kilogrammes, comme on l'a trouvé article 287. Cette dernière valeur étant plus petite que $\frac{Q}{\cos. \omega}$, la condition énoncée précédemment n'est plus remplie. Cependant la colonne n'est point encore sollicitée au renversement, parce que le diamètre de cette colonne est assez grand pour que la direction de la résultante des deux tensions égales R et T passe dans l'intérieur de la base; en effet, cette direction partageant en deux parties égales l'angle compris entre les deux chaînes, forme avec la verticale un angle exprimé par $\frac{\omega - \alpha}{2} = 6° 9' 13''$, et rencontre la base de la colonne à $1^{m},18$ de distance de l'axe, tandis que le rayon de cette base est $1^{m},65$. Comme le rapport φ du frottement à la pression ne peut pas être nul, ni même sensiblement moindre que la valeur donnée par Coulomb, on peut juger d'après ce qui précède que la direction de la résultante des tensions des deux chaînes s'écartera toujours très-peu de l'axe de la colonne, sur la stabilité de laquelle il ne doit rester aucune incertitude.

291. La pression exercée sur les colonnes, par suite des tensions des chaînes, différera très-peu de la somme des composantes verticales des tensions des chaînes de support et des chaînes de retenue, somme exprimée, d'après la formule (13), article 130, par

$$Q \text{ tang. } \alpha + R \sin. \omega = 1\ 147\ 995 \text{ kilogrammes},$$

en mettant pour Q la valeur trouvée article 287, et pour R la plus grande des valeurs trouvées article 289. L'effort supporté par chaque colonne est la moitié de cette quantité, ou 573 998 kilogrammes. On vérifie que les matériaux avec lesquels les colonnes seront construites offriront une résistance bien supérieure à cet effort. En effet, la pierre, à la

base de la colonne, ne supportera qu'une pression d'environ 280 kilogrammes pour une étendue de 25 centimètres carrés (*), tandis que de petits cubes de la même pierre, de 5 centimètres de côté, exigent pour être écrasés un effort de 4 à 5000 kilogrammes. Chacune des pièces de l'armature a d'ailleurs une force plus que suffisante pour soutenir seule la totalité de la presion exercée sur la colonne. Enfin l'effort supporté par chaque pieu de fondation ne s'élève qu'à environ 34000 kilogrammes (**). Nous n'insistons pas sur ces calculs, qui ne comportent pas de considérations spéciales. On doit observer d'ailleurs que tous les résultats précédens se rapportent au cas où la construction éprouverait la surcharge déterminée article 285 : les actions dues au poids seul de cette construction sont moindres dans le rapport de 2 à 3 environ.

292. La courbe d'appui placée à l'entrée des puits, à l'endroit où les chaînes de retenue changent de direction, supporte une pression considérable, qui est la résultante des tensions des deux parties de cette chaîne. En supposant ces tensions égales, cas dans lequel cette résultante est la plus grande possible, et remarquant que l'angle compris entre les deux parties de la chaîne est $90° + \omega$, on a

$$R.2\cos.\frac{90°+\omega}{2} = R.2\sin.\left(45° - \frac{\omega}{2}\right) = 2\,083\,460 \text{ kilogrammes}$$

pour la valeur de la pression dont il s'agit, en donnant toujours à R la plus grande des valeurs trouvées article 289. La force agissant dans chaque puits sera la moitié de cette quantité ou 1 041 730 kilogrammes. Cette pression est près du double de la charge supportée par chaque colonne, et l'arc-boutant en maçonnerie contre lequel elle s'exerce doit être fondé et construit avec précaution.

La profondeur des puits a d'ailleurs été déterminée, comme on l'a dit article 283, de manière que le poids des matières correspondant verticalement aux portions de voûte qui accompagnent les deux puits voisins, et que les chaînes tendent à soulever, surpassât sensiblement la valeur de R que l'on vient de citer.

Effets produits par l'extensibilité du fer.

293. Nous considérerons successivement les effets de ce genre qui auront lieu à l'instant où la construction, ayant été mise en place, se trouve abandonnée pour la pre-

(*) On sait que, dans les piliers du dôme des Invalides, la pression est, pour la même étendue, de 369 kilogrammes, et dans les piliers du dôme de Sainte-Geneviève, de 736 kilogrammes. *Art de bâtir*, par M. Rondelet, tom. III, page 74.

(**) La charge permanente des pieux des piles des ponts de Neuilly et d'Orléans s'élève à plus de 100000 kilogrammes. *Mémoire sur les pieux et pilotis*, dans les Œuvres de M. Perronet.

mière fois à l'action de la pesanteur, et ceux que l'on observera plus tard, par suite de surcharges que le plancher doit supporter.

D'après les procédés qui doivent être suivis pour la mise en place du pont, les inconvéniens qui résulteraient de l'allongement des chaînes de retenue, lorsqu'elles commenceront à supporter les tensions dues au poids des chaînes de support et du plancher, se trouveront prévenus. On emploiera, pour y parvenir, des appareils au moyen desquels on tendra les chaînes de retenue, à mesure que les fers s'allongeront; et l'on préviendra de cette manière tout déplacement dans les points des chaînes portant sur les colonnes, et qui pourrait provenir, soit de l'allongement des fers, soit du resserrement des assemblages, soit du tassement des maçonneries auxquelles les extrémités des chaînes de retenue sont fixées. L'abaissement qui surviendra dans le plancher du pont sera donc dû seulement à l'allongement des chaînes de support.

L'allongement de la moitié de ces chaînes, dans l'intervalle de 150 mètres correspondant à la longueur du plancher, est exprimé à très-peu près, d'après l'article 174, par

$$\frac{ph^3}{E.2f},$$

formule dans laquelle on doit mettre pour h et f les valeurs données article 287, et pour p la valeur 3896 kilogrammes, donnée article 284, et correspondant au poids de la construction. La constante E est exprimée, d'après l'article 176, par $20000^{k}.\Omega$, en appelant Ω l'aire de la section transversale des fers des chaînes évaluée en millimètres carrés. Cette aire est ici 115200 ; et par conséquent $E = 2304000000$ kilogrammes. Au moyen de ces valeurs, la formule précédente donne pour l'allongement cherché $0^{m},0357$.

Il faut ajouter à cette quantité l'allongement de la partie des chaînes comprise entre l'extrémité des courbes et les axes des colonnes. La longueur de cette partie est de $5^{m},085$; la tension qu'elle supporte est $\frac{ph^2}{2f.\cos.\alpha}$: l'allongement produit par cette tension est donc

$$(5^{m},085)\,\frac{ph^2}{E.2f.\cos.\alpha} = 0^{m},0025.$$

En ajoutant cette quantité à la précédente, on aura $0^{m},0382$ pour l'allongement de chaque moitié des chaînes de support dû au poids de la construction.

294. On calculera avec une exactitude suffisante l'abaissement qui en résulte au milieu du plancher, en regardant la ligne comprise entre les axes des colonnes comme une courbe parabolique, et employant la formule (4), article 175,

$$\varpi = \frac{3h}{4f}\,\gamma,$$

dans laquelle il faudra supposer $h = 80^m$, $f = 11^m,33$, et $\gamma = 0^m,0382$. Cette formule donnera, pour l'abaissement dont il s'agit, $\varphi = 0^m,202$.

Il peut arriver, par l'effet du resserrement des asssemblages, que l'abaissement du milieu du plancher surpasse la valeur qui vient d'être calculée; mais ce dernier effet, qui sera d'autant moins sensible que les assemblages auront été exécutés avec plus de soin, et que l'on aura donné aux chaînons plus de longueur, n'est pas de nature à être prévu par le calcul.

295. Supposons maintenant la construction mise en place, et admettons que le plancher ait reçu la surcharge déterminée article 285. Pour en apprécier exactement l'effet, il est nécessaire de se rendre compte de l'état où se trouveront alors les chaînes de retenue.

On a dit ci-dessus que l'on aurait les moyens de régler la tension de ces chaînes, avant d'abandonner la construction à l'action de la pesanteur. Il conviendra de régler cette tension de manière que les extrémités supérieures des colonnes soient également sollicitées de chaque côté, c'est-à-dire que les composantes horizontales des tensions des chaînes de support et des chaînes de retenue soient égales. Les changemens de la température pourront ensuite faire varier la tension de ces dernières chaînes, conformément à ce qui a été dit article 195; mais ces variations seront peu considérables, et il est convenable de considérer ici les chaînes de retenue dans l'hypothèse de l'égalité des deux tensions horizontales. La valeur de ces tensions a été déterminée article 288: elle est $Q = 1095750$ kilogrammes. D'après cela, la flèche de la courbure qu'affectera la partie inclinée de la chaîne de retenue, par l'action du poids de cette chaîne, donnée par la formule (17), article 136, sera

$$\frac{\sigma a^2}{8Q} = 0^m,1366,$$

en mettant pour a et σ les valeurs indiquées article 289; et l'on trouvera par la formule (18), article 137, pour l'excès de la longueur de la courbe sur celle de la ligne droite qui en réunit les extrémités,

$$\frac{\sigma^2 a^3 \cos.\omega}{24Q^2} = 0^m,0016.$$

Les chaînes de retenue étant dans l'état qui vient d'être indiqué, si le plancher reçoit sur chaque unité de longueur une surcharge $\varpi = 1697$ kilogrammes, la tension augmentant dans ces chaînes, les fers s'allongeront, en même temps que la courbure des parties inclinées diminuera. Il est à remarquer qu'à raison du frottement de la chaîne sur la courbe d'appui placée aux extrémités supérieures des colonnes, ou de la résistance que ces colonnes opposent à la flexion, il est impossible que l'augmentation

occasionnée par la surcharge ϖ dans la tension des chaînes de support se transmette en entier aux chaînes de retenue. Cependant, pour éviter toute évaluation incertaine des résistances dont il s'agit, et pour obtenir une limite que l'allongement des chaînes de retenue ne puisse dépasser, nous supposerons que la tension augmente dans ces chaînes jusqu'au fond des puits, dans la même proportion qu'elle augmente dans les chaînes de support.

En attribuant à la tension horizontale Q la même valeur que ci-dessus, la tension due au poids seul de la construction est, dans le sens des chaînes de retenue, $\frac{Q}{\cos.\omega}$, et nous admettons que cette tension est transmise à la partie de ces chaînes contenue dans les puits. Par l'effet de la surcharge ϖ, la tension dont il s'agit augmentera de la quantité $\frac{Q\varpi}{p.\cos.\omega}$, en supposant $p = 3896$ kilogrammes; et comme la longueur de cette partie des chaînes est de $11^m,7$, la quantité dont elle s'allongera est

$$(11^m,7)\,\frac{Q\varpi}{E.p.\cos.\omega} = 0^m,00224,$$

en donnant à E la valeur qui convient aux chaînes de retenue, c'est-à-dire, en faisant $E = 20000^k \times 135360 = 2707200000$ kilogrammes.

Quant à la partie inclinée de ces chaînes, on aura d'abord pour la portion de l'allongement due à la diminution de la courbure, d'après la formule (19), article 138,

$$\frac{\sigma^2 a^3 \cos.\omega}{24.Q^2}\left[1 - \frac{p^2}{(p+\varpi)^2}\right] = 0^m,00076.$$

On trouvera ensuite pour la portion de l'allongement due à l'extension des fers, d'après la formule (11), article 182,

$$\frac{Q\varpi.a}{E.p.\cos.^2\omega} = 0^m,00647.$$

En ajoutant ces trois quantités, on trouve pour l'allongement total des chaînes de retenue, $0^m,00947$. Ce résultat est une limite dont le véritable allongement demeurera toujours fort éloigné : dans l'état habituel de la circulation, l'allongement dont il s'agit ne s'élevera jamais à 2 millimètres.

296. Pour rechercher maintenant l'abaissement que la surcharge ϖ causerait dans le plancher, il faut remarquer en premier lieu que l'allongement des chaînes de retenue qui vient d'être calculé permet aux extrémités supérieures des colonnes de se déplacer horizontalement de la quantité

$$\frac{0^m,00947}{\cos.\omega} = 0^m,01027,$$

si on regarde les colonnes comme fléchissant librement par suite de cet allongement. Si l'on suppose au contraire les colonnes fixes, et les chaînes glissant sur les courbes d'appui, les chaînes de support se trouvent allongées de $0^m,00947$. Dans la première hypothèse, la demi-corde de l'arche est diminuée, et l'abaissement qui en résulte au point milieu du plancher, calculé par la formule (13), article 183, est

$$\frac{3c}{4f} n = 0^m,05502,$$

en supposant c égale à la demi-longueur des chaînes, comptée jusqu'à l'axe des colonnes, qui est $80^m,96$, en faisant $f = 11^m,33$, et en donnant à n la valeur $0^m,01027$. Dans la seconde hypothèse, la demi-corde de l'arche conserve la même grandeur, mais la moitié de la longueur de la chaîne est augmentée, et l'abaissement correspondant du milieu du plancher, calculé par la formule (16), article 186, est

$$\frac{3h}{4f} \gamma = 0^m,05015,$$

en y supposant $h = 80^m$, en y donnant à f la valeur précédente, et en faisant $\gamma = 0^m,00947$.

On observera ensuite qu'il se produit au milieu du plancher un autre abaissement dû à l'extension qu'éprouvent les chaînes de support, dont la valeur, d'après la formule (5), article 175, est à fort peu près

$$\frac{3\varpi . h^4}{8E.f^2} = 0^m,08813;$$

en donnant à h et f les mêmes valeurs que ci-dessus, et à E la même valeur que dans l'article 293.

Cet abaissement étant ajouté à celui provenant de l'allongement des chaînes de retenue, on a en totalité $0^m,143$, ou $0^m,138$, pour la quantité dont le point milieu du plancher peut s'abaisser par suite de l'allongement des chaînes, dû à la charge ϖ.

Les résultats qui viennent d'être obtenus, calculés dans l'hypothèse d'une surcharge qui ne peut jamais avoir lieu, en supposant d'ailleurs la construction parfaitement flexible, et que les tensions produites dans une partie des chaînes se transmettent sans altération dans toutes les autres, n'indiquent pas, à beaucoup près, des déplacemens assez considérables pour inquiéter sur la solidité des colonnes. L'élasticité de la pierre est plus que suffisante pour permettre sans inconvénient, à l'extrémité supérieure de ces colonnes, un déplacement d'un centimètre, c'est-à-dire, de $\frac{1}{1450}$ de la hauteur. Le déplacement dont il s'agit aurait une valeur plus petite, si les chaînes de retenue étaient moins longues : sans la nécessité où l'on se trouve ici de laisser libre le

passage sur les quais, on aurait donné à ces chaînes une direction plus inclinée, et on les aurait attachées fixement aux extrémités supérieures des colonnes, de manière à rendre tout glissement impossible.

Effets des variations de la température.

297. Ces effets dépendront de la température de l'atmosphère, à l'époque où le pont aura été mis en place et où l'on aura réglé la tension des chaînes de retenue. Nous supposerons que cette température est marquée par 10 degrés du thermomètre centigrade, et que la température de l'air peut s'élever ou s'abaisser de 25° au-dessus ou au-dessous de ce terme ; ce qui revient à admettre, d'après l'article 191, que les fers peuvent s'allonger ou s'accourcir d'une fraction de la longueur exprimée par 0,000 305. Nous négligerons d'ailleurs les variations de longueur qu'éprouveront les parties des chaînes de retenue contenues dans les puits, où la température demeurera toujours à peu près la même. Enfin, en observant que les supports des chaînes formés par des colonnes en pierre d'un grand diamètre, n'éprouveraient que des dilatations assez petites, lors même que les variations de température pénétreraient dans toute l'épaisseur, nous regarderons comme nuls les changemens de longueur de ces supports, qui ont été représentés par $\mathfrak{C}$ dans les formules du paragraphe IX ; supposition qui tend à faire estimer plus grands qu'ils ne seront véritablement, les effets de l'allongement et de l'accourcissement des chaînes.

La longueur de la partie inclinée des chaînes de retenue est $\frac{a}{\cos.\omega}$: ainsi l'allongement de ces chaînes, représenté par ρ dans les articles 193 et suivans, est

$$\rho = 0{,}000\,305 \,.\, \frac{a}{\cos.\omega} = 0^{\text{m}}{,}0103.$$

La demi-longueur de la courbe des chaînes de support, comptée depuis l'axe des colonnes, est $80^{\text{m}},96$; et la quantité dont cette demi-longueur varie, représentée par γ dans les articles cités, est

$$\gamma = 0{,}000305 \times 80{,}96 = 0^{\text{m}}{,}0247.$$

Cela posé, regardons en premier lieu les colonnes comme des supports susceptibles de se déverser sans résistance de côté et d'autre : l'allongement des chaînes de retenue permettra un déplacement horizontal des extrémités supérieures de ces colonnes, exprimé, d'après la formule (1), article 193 (où l'on doit faire $\mathfrak{C} = 0$), par

$$n = \frac{\rho}{\cos.\omega} = 0^{\text{m}}{,}0112.$$

L'abaissement qui aura lieu au milieu du plancher du pont, d'après la formule (2), article 194, sera

$$\frac{3h}{4f}\gamma + \frac{3c}{4f\cos.\omega}\rho = 0^m,1908,$$

en mettant pour γ et ρ les valeurs précédentes, et en calculant pour la courbe comprise entre les axes des colonnes, c'est-à-dire en faisant $h = 80^m$, $f = 11^m,33$, $c = 80^m,96$.

Si nous regardons en second lieu les colonnes comme fixes et les chaînes comme devant glisser sur les courbes d'appui, et si nous supposons nulle la résistance du frottement sur ces courbes, il s'ensuivra que les chaînes devront glisser de la quantité donnée par la valeur précédente de ρ, qui est $0^m,0103$, et que l'abaissement du milieu du plancher, d'après la formule (4), article 195, sera

$$\frac{3h}{4f}(\gamma + \rho) = 0^m,1855,$$

valeur qui doit être regardée comme une limite que cet abaissement ne peut atteindre. En effet, la résistance du frottement ne peut être supposée nulle, et on doit avoir égard aux compensations dues à la courbure et à l'élasticité des chaînes de retenue, conformément à ce qui a été dit article 197.

Pour appliquer les formules données dans ce dernier article, nous aurons ici, en regardant les tensions horizontales comme dues seulement au poids de la construction (et supposant toujours le rapport du frottement à la pression $\varphi = 0,28$),

$$Q = 1\,095\,750 \text{ kilogrammes (article 288)},$$

$$Q' = Q.e^{-\varphi.\pi\frac{\alpha+\omega}{180^\circ}} = 931\,450 \text{ kilogrammes},$$

$$Q'' = Q.e^{\varphi.\pi\frac{\alpha+\omega}{180^\circ}} = 1\,289\,040 \text{ kilogrammes}.$$

En substituant ces valeurs dans les formules (5) et (6) de l'article cité, où l'on fera en même temps $a = 31^m,2$, $\sigma = 1230$ kilogrammes, et $E = 2\,707\,200\,000$ kilogrammes, la première donnera $0^m,0028$, et la seconde $0^m,003$: par conséquent, en retranchant ces quantités de la valeur précédente de ρ, cette valeur devra être réduite à $0^m,0075$ dans le cas de l'élévation, et à $0^m,0073$ dans le cas de l'abaissement de la température.

On conclut de ce qui précède, que, par l'effet de la variation de température que nous admettons ici, les points des chaînes portant sur les colonnes seront tout au plus

sollicités à se déplacer de 8 à 9 millimètres, soit que la colonne fléchisse de cette quantité, soit que les chaînes glissent sur les courbes d'appui. En effet, lors même que la colonne fléchirait, ce mouvement ne pouvant s'effectuer sans résistance, il s'établira alors, dans les chaînes de retenue, des tensions moindres dans le cas d'un échauffement, et plus grandes dans le cas d'un refroidissement ; et il en résultera des compensations sur l'allongement ou l'accourcissement de ces chaînes, à peu près semblables à celles qui viennent d'être calculées dans l'hypothèse du glissement.

Changemens de figure produits par le passage des voitures.

298. La plus grande valeur qu'il soit possible d'attribuer à un poids additionnel, qu'on supposerait placé au milieu du plancher, est 19600 kilogrammes, c'est-à-dire, le poids de deux fortes charrettes chargées qui se rencontreraient en ce point. L'abaissement résultant de l'action de ce poids se compose de deux parties, l'une relative au changement de la figure des chaînes, et l'autre à l'allongement des fers, dus à l'accroissement de la tension. La première partie, d'après la formule (12), article 123, est à très-peu près

$$\frac{\Pi f}{4ph};$$

et la seconde partie, d'après la formule (9) article 179,

$$\frac{9}{32}\cdot\frac{\Pi h^3}{Ef^2}.$$

Pour faire usage de ces formules, on doit remarquer que, dans le pont projeté, les chaînes ne supportent le poids du plancher que sur l'intervalle de 150 mètres compris entre les murs de quai, tandis que la corde de la courbe qu'elles forment a 160 mètres de longueur, mesurée entre les axes des colonnes : les formules précédentes, qui supposent la charge des chaînes distribuée uniformément sur toute l'étendue de cette corde, ne peuvent donc être appliquées ici rigoureusement. Mais il est évident qu'en attribuant constamment au poids de la construction la valeur $2ph = 584432$ kilogrammes donnée article 284, et considérant successivement la courbe des chaînes dans l'intervalle de 150 mètres et dans l'intervalle de 160 mètres, les résultats que l'on obtiendra ainsi, qui différeront fort peu l'un de l'autre, pourront être regardés comme deux limites entre lesquelles le véritable résultat se trouve nécessairement compris. En effet, dans la première hypothèse, nous supposons les points fixes auxquels les chaînes sont attachées trop rapprochés l'un de l'autre, et dans la seconde nous diminuons le poids des parties de la construction qui sont exposées aux plus grands déplacemens.

En supposant donc d'abord $\Pi = 19600$ kilogrammes, $2ph = 584432$ kilogrammes, $h = 75$ mètres, $f = 10$ mètres, $E = 2\,304\,000\,000$ kilogrammes (comme dans l'article 293), la première des deux formules précédentes donnera $0^m,1677$, et la seconde $0^m,0101$: la somme de ces quantités est $0^m,1778$.

En attribuant ensuite la même valeur à Π, à $2ph$ et à E, mais faisant $h = 80$ mètres, $f = 11^m,33$, la première formule donnera $0^m,19$, et la seconde $0^m,0095$; quantités dont la somme est $0^m,1995$.

L'abaissement cherché est donc compris entre $0^m,18$ et $0^m,2$: cet abaissement serait dans la réalité sensiblement au-dessous de ce résultat, puisque les formules précédentes supposent la construction parfaitement flexible, et le poids des deux voitures et des chevaux concentré en un seul point. On peut juger d'ailleurs, d'après le peu de différence qui se trouve entre les deux nombres précédens, qu'il importe peu de calculer ici d'une manière ou de l'autre.

299. Nous supposerons maintenant un certain nombre de voitures occupant une portion de la longueur du plancher, et placées au milieu de cette longueur : on connaîtra la partie de l'abaissement due au changement de figure des chaînes par le procédé indiqué article 120. Il s'agit en premier lieu de trouver la valeur de Q' qui satisfait à l'équation (7) de cet article, opération que l'on facilitera beaucoup en remarquant que l'on peut ici, sans erreur sensible, se borner, dans le second membre de cette équation, aux deux premiers termes des séries. Elle se réduit alors à

$$c = h + \frac{1}{48\,Q'^2 . p}\left[(2ph+\Pi)^3 - (2ph'+\Pi)^2\,\Pi\right] - \frac{1}{1280 . Q'^4 . p}\left[(2ph+\Pi)^5 - (2ph'+\Pi)^4\,\Pi\right]:$$

en la résolvant par rapport à Q', on trouve

$$Q'^2 = \frac{1}{p(c-h)}\left[\frac{(2ph+\Pi)^3 - (2ph'+\Pi)^2\,\Pi}{48} - \frac{(2ph+\Pi)^5 - (2ph+\Pi)^4\,\Pi}{1280 . Q'^2}\right],$$

ou, à fort peu près,

$$Q' = \sqrt{\frac{(2ph+\Pi)^3 - (2ph'+\Pi)^2\,\Pi}{48 . p(c-h)}}\left[1 - \frac{3}{160 . Q'^2} . \frac{(2ph+\Pi)^5 - (2ph'+\Pi)^4\,\Pi}{(2ph+\Pi)^3 - (2ph'+\Pi)^2\,\Pi}\right].$$

Cette valeur doit ensuite être substituée dans l'expression (8) de f', article 120, qui est

$$f' = \frac{2ph^2 + \Pi(2h - h')}{4\,Q'}.$$

En calculant conformément à la première des deux hypothèses indiquées ci-dessus, on fera dans ces formules $h = 75$ mètres, $f = 10$ mètres, $p = 3\,896$ kilogrammes, $2ph = 584\,432$ kilogrammes.

Supposons d'abord, comme dans l'article précédent, $h' = 0$, $\Pi = 19600$ kilogrammes; nous trouverons $Q' = 1151250$ kilogrammes, et $f' = 10^m,16$, en sorte que l'abaissement cherché est $0^m,16$. On a trouvé ci-dessus, par la formule (12) de l'article 123, cet abaissement égal à $0^m,168$: la différence peu importante des deux résultats tient à ce que les formules que nous employons ici ne sont qu'approchées.

Supposons maintenant au milieu du plancher six voitures, pesant ensemble 58800 kilogrammes, en regardant ce poids comme réparti uniformément sur l'espace de 48 mètres que les voitures occuperont. On aura $h' = 24$ mètres, $\Pi = 58800$ kilogrammes; et les formules précédentes donneront $Q' = 1256760$ kilogrammes, et $f' = 10^m,193$, en sorte que l'abaissement dû au changement de figure des chaînes est $0^m,193$.

Supposons encore au milieu du plancher dix voitures, pesant ensemble 98000 kilogrammes, en regardant ce poids comme étant réparti uniformément sur l'espace de 80 mètres. On aura $h' = 40$ mètres, $\Pi = 98000$ kilogrammes; et les mêmes formules donneront $Q' = 1346540$ kilogrammes, $f' = 10^m,139$, en sorte que l'abaissement est $0^m,139$.

En supposant un plus grand nombre de voitures, l'abaissement dû au changement de figure diminuera encore; et si ce nombre était tel que les voitures occupassent la longueur entière du pont, on trouverait pour cet abaissement une valeur nulle. On conclut de ce qui précède que la partie de l'abaissement du milieu du plancher produite par la flexibilité des chaînes peut tout au plus s'élever à $0^m,2$. L'extension des fers due aux surcharges que nous venons de considérer n'augmenterait pas ce résultat de $0^m,03$. Ainsi la limite de l'abaissement du milieu du plancher est environ $0^m,23$, c'est-à-dire $\frac{1}{652}$ de la longueur de ce plancher. Le cas de plusieurs voitures pesamment chargées, qui se rencontreraient précisément au milieu du pont, sera d'ailleurs extrêmement rare; on prévoit plutôt que deux ou trois voitures semblables peuvent s'y trouver à la suite les unes des autres : elles causeraient un abaissement de 10 à 12 centimètres au plus. Les abaissemens produits par les carrosses ou voitures de place, dans les suppositions les plus désavantageuses, ne s'éleveront pas à 3 ou 4 centimètres. Malgré la flexibilité des chaînes et du plancher, la construction projetée le cède peu, sous le rapport de la fixité des parties, aux ponts en charpente ordinaires, lorsque l'ouverture des arches est considérable.

Oscillations et vibrations des chaînes, dues au mouvement des voitures.

300. Les paragraphes X et XI de la deuxième partie contiennent les solutions de diverses questions de dynamique, d'après lesquelles on peut apprécier dans les ponts suspendus les effets dont il s'agit. Mais en faisant usage de ces résultats, on doit examiner avec soin la nature des questions résolues, et les différences qui existent entre l'énoncé de ces questions et les objets auxquels on veut les appliquer.

On a considéré, dans les articles 204 et suivans, un fil homogène, parfaitement flexible et inextensible, attaché à deux points fixes situés sur une même ligne horizontale. Ce fil est chargé dans tous les points de poids distribués uniformément sur cette ligne, et de plus un poids Π est attaché dans le milieu. Les oscillations sont produites par l'effet d'une vîtesse verticale imprimée au poids Π. La solution apprend que tous les points du fil oscillent sans sortir de la ligne verticale où ils se trouvent placés dans l'état d'équilibre : l'étendue des oscillations du point milieu est donnée par la formule (17), article 214; et cette étendue est à fort peu près proportionnelle, 1.° au rapport du poids Π au poids réparti dans la longueur du fil; 2.° à la racine carrée de la flèche de courbure.

L'objet de cette solution est la recherche des changemens de figure des chaînes et des abaissemens des points du plancher, causés par les secousses des voitures et dus à la flexibilité de la construction : le poids Π représente le poids d'une voiture qu'on supposerait placée au milieu de la longueur du pont, et l'on regarde la vîtesse imprimée à ce poids comme due à la hauteur d'un obstacle qu'auraient surmonté les roues de la voiture, et dont elles retomberaient sur le plancher. Dans la construction projetée, les chaînes chargées du poids du plancher ne peuvent être assimilées rigoureusement à un fil homogène et parfaitement flexible; et sur-tout on ne peut assimiler une vîtesse imprimée à une voiture placée sur le plancher, à la vîtesse qui serait imprimée à un poids placé au milieu de ce fil. En effet, la vîtesse avec laquelle une voiture tombe sur le plancher se transmet aux parties environnantes, et s'affaiblit par ce partage; le plancher cède en pliant; les tiges de suspension voisines du point où le choc est exercé, cèdent elles-mêmes à l'action de ce choc, en s'allongeant un peu; et la vîtesse imprimée aux chaînes est nécessairement fort inférieure à celle que possédait la voiture à l'instant du choc. La disposition des corps qui exercent et reçoivent le choc, et transmettent aux chaînes le mouvement imprimé, est d'ailleurs trop compliquée pour que l'on puisse espérer, dans l'état actuel de la mécanique, de reconnaître exactement par le calcul la manière dont s'opère cette transmission. Il résulte de ces considérations que l'on ne doit point penser que la formule (18), article 214,

$$y' - y = \frac{V\Pi}{2ph}\left(1 + \frac{\Pi}{8ph}\right) \cdot \sqrt{\frac{2f}{g}},$$

en y mettant pour V la vîtesse due à la hauteur d'un obstacle surmonté par une voiture, donnerait exactement la valeur de l'abaissement du plancher dû à la flexibilité de la construction : on doit présumer au contraire que cette formule indiquerait un abaissement beaucoup plus grand que celui qui aurait réellement lieu dans la construction exécutée.

Si l'on veut toutefois calculer au moyen de cette formule l'abaissement dont il s'agit, on pourra supposer $\Pi = 8400$ kilogrammes, poids des plus fortes charrettes chargées, $2ph = 584432$ kilogrammes, poids du pont projeté; $f = 11^m,33$. Quant à la vîtesse V, on remarquera que, sur un plancher en bois garni de bandes de fer, les voitures ne peuvent éprouver que de très-faibles secousses : en admettant toutefois que les deux roues de la charrette surmontent en même temps un obstacle de $0^m,1$ de hauteur, nous supposerons V égal à la vîtesse due à cette hauteur, c'est-à-dire, $V = 1^m,4$. Au moyen de ces valeurs, la formule précédente donne $y' - y = 0^m,031$: ainsi l'on est assuré que les abaissemens des points du plancher provenant de la flexibilité des chaînes, et dus aux plus fortes secousses imprimées par les voitures, demeureront fort au-dessous de 3 centimètres.

301. Nous remarquerons d'ailleurs que, si l'on ne peut espérer de connaître exactement, au moyen de la formule précédente, la valeur absolue des abaissemens dont il s'agit, cette formule est néanmoins propre à faire juger des rapports de ces valeurs dans diverses constructions : les erreurs que l'on pourrait commettre, en l'employant de cette manière, sont d'un ordre inférieur relativement à celles que l'on commettrait en l'employant comme on vient de le faire. Nous allons donc comparer, au moyen de cette formule, l'étendue des oscillations verticales dans le pont projeté, et dans le pont construit sur le Tweed par le capitaine Brown, et décrit dans les articles 46 et suivans.

Pour effectuer convenablement cette comparaison, on doit remarquer que la disposition du pont du Tweed diffère de celle du pont projeté en ce que, dans le premier de ces ponts, le poids du plancher ne s'exerce que sur une portion de la longueur des chaînes, la distance des points d'attache de ces chaînes étant de $131^m,7$, tandis que la longueur du plancher est seulement de 110 mètres. Les résultats dont il s'agit de faire ici l'application supposent la charge des chaînes répartie uniformément. Mais si au pont du Tweed le plancher était prolongé sur l'intervalle total de $131^m,7$, les mêmes secousses imprimées à ce plancher produiraient moins d'effet qu'elles n'en produisent actuellement; car, la figure des chaînes demeurant à fort peu près la même, et les mouvemens imprimés se répartissant sur une plus grande masse, les vîtesses acquises et les déplacemens des points seraient nécessairement moins considérables. Par conséquent, si, dans le calcul, nous supposons le plancher ainsi prolongé, nous faisons une hypothèse d'après laquelle nous sommes conduits à estimer dans le pont projeté les secousses plus grandes qu'elles ne le seront en effet.

D'après le résultat rapporté ci-dessus, l'étendue de ces mouvemens, en supposant égales de part et d'autre la masse et la vîtesse des voitures, sera proportionnelle, à fort peu près, à

$$\frac{\sqrt{f}}{2ph};$$

quantité qui, en faisant $2ph = 115\,824$ kilogrammes, $f = 8$ mètres, valeurs qui conviennent au pont du Tweed dans la supposition indiquée ci-dessus, devient 0,0000244.

Quant au pont projeté, la différence entre la distance des points de suspension des chaînes et la longueur du plancher est trop petite pour qu'il soit nécessaire d'y avoir égard. En supposant $2ph = 584432$ kilogrammes, $f = 10$ mètres, valeurs qui conviennent à ce pont, la même quantité devient 0,00000541. Ainsi les excursions des points à partir des situations d'équilibre, dues à la flexibilité de la construction, seront à peu près entre elles, dans les deux ponts, dans le rapport de 1 à 0,22 : elles seront donc beaucoup moindres dans le pont projeté, et cette diminution compensera, pour le moins, l'excès du poids des voitures de transport auxquelles ce dernier pont peut être dans le cas de donner passage. Cette conclusion paraîtra plus certaine encore, si l'on remarque que les recherches sur lesquelles est fondée la comparaison précédente supposent les chaînes et le plancher parfaitement flexibles, et que ces deux parties de la construction sont beaucoup moins flexibles dans le pont projeté qu'elles ne le sont dans le pont construit sur le Tweed.

302. Les recherches contenues dans le paragraphe XI, articles 235 et suivans, ont pour objet les mouvemens des points d'un fil élastique, dans le sens de la longueur de ce fil. Ces recherches sont importantes, parce que, dans les ponts suspendus, les quantités dont les parties des chaînes sont exposées à s'allonger par l'effet des secousses des voitures et la rapidité des mouvemens, paraissent être la véritable mesure de la fatigue que ces chaînes éprouvent, et des altérations que, suivant quelques personnes, ces mouvemens, continuellement répétés, pourraient produire avec le temps dans la constitution physique du fer. L'équation (31), article 240, donne, à fort peu près, l'allongement que peut subir une des moitiés du fil, par l'effet d'une vîtesse verticale V imprimée au poids Π, que l'on suppose attaché au milieu de ce fil. L'amplitude de la courbe est supposée fort petite, et le poids Π fort petit par rapport au poids réparti sur la longueur du fil. Quant à l'application que l'on pourrait faire de ces résultats aux ponts suspendus, cette application est sujette aux difficultés énoncées précédemment ; et les formules sont bien plus propres à faire juger des rapports des effets dont il s'agit dans divers ponts, qu'à déterminer les valeurs absolues des quantités cherchées.

La formule citée est

$$\sigma' - \sigma = \frac{V\Pi^2 . f}{2p^2 h^2}\left(1 - \frac{\Pi}{4ph}\right)\sqrt{\frac{p}{gE}}:$$

en y substituant les valeurs qui conviennent au pont projeté, et faisant, comme ci-dessus,

$\Pi = 8400$ kilogrammes, $V = 1^m,4$, cette formule donne $\sigma' - \sigma = 0^m,000\,00238$, pour l'allongement de la moitié des chaînes. Le véritable allongement devant être au-dessous de cette valeur, on peut juger, d'après cela, que les plus fortes secousses ne peuvent étendre les parties des chaînes que de quantités extrêmement petites, et n'y causeront aucune altération. Tout l'effet de ces secousses se réduit presque à imprimer aux chaînes les oscillations verticales dont il a été question précédemment, et elles ne communiquent presque aucun mouvement aux points des chaînes dans le sens de la longueur, parce que la vîtesse verticale imprimée à la voiture ne fournit dans ce sens que des composantes extrêmement petites.

303. Si l'on veut d'ailleurs connaître les rapports des extensions auxquelles sont exposées les parties des chaînes dans le pont construit sur le Tweed et dans le pont projeté, on remarquera que, la masse et la vîtesse des voitures étant supposées les mêmes, ces extensions sont à peu près proportionnelles, d'après la formule (35), article 243, à

$$\frac{f}{p^2 h^2}\sqrt{\frac{p}{E}}.$$

Nous avons, dans le pont du Tweed, $h = 65^m,85$, $ph = 57912$ kilogrammes, $p = 879$ kilogrammes, $f = 8$ mètres. Quant à la constante E, les chaînes de ce pont étant formées de douze barres de fer de $0^m,051$ de diamètre, dont la somme des aires des sections transversales est 24514 millimètres carrés, on a, conformément à l'article 176, $E = 20\,000^k \times 24514 = 490\,280\,000$ kilogrammes.

Nous avons, dans le pont projeté, $h = 75$ mètres, $ph = 292216$ kilogrammes, $p = 3896$ kilogrammes, $f = 10$ mètres; $E = 2\,304\,000\,000$ kilogrammes.

En substituant successivement ces valeurs dans la formule précédente, les deux résultats que l'on obtient sont entre eux dans le rapport de 1 à 0,0334. Ainsi le même choc expose les parties des chaînes, dans le pont projeté, à des extensions environ trente fois plus petites que dans le pont du Tweed. Les fers se trouveront donc bien moins fatigués dans le premier de ces deux ouvrages qu'ils ne le sont dans le second.

304. Il peut être intéressant de connaître les résultats donnés par les formules des paragraphes X et XI pour la durée des oscillations verticales et des vibrations longitudinales des chaînes. D'après l'équation (16), article 213, la durée des oscillations verticales est exprimée par

$$t = \frac{4}{2i+1}\left(1 + \frac{\Pi}{8ph}\right)\sqrt{\frac{2f}{g}}:$$

en supposant $i = 0$, on aura la durée de l'oscillation qui domine toutes les autres, et qui répond au son le plus grave que rendrait la corde, si ces mouvemens étaient assez

rapides pour devenir sensibles à l'oreille. En faisant, comme ci-dessus, $\Pi = 8400$ kilogrammes, $2ph = 584432$ kilogrammes, $f = 10$ mètres, cette formule donnera $t = 5'',7$.

On déduira de l'équation (29), article 239, que la durée des vibrations longitudinales est donnée par l'expression

$$t = \frac{4h}{2i+1}\left(1 + \frac{\Pi}{2ph}\right)\sqrt{\frac{p}{gE}}:$$

en y supposant de même $i = 0$, et faisant $p = 3896$ kilogrammes, $E = 2304000000$ kilogrammes, $h = 75$ mètres, on trouve $t = 0'',13$; en sorte qu'il y aurait sept à huit vibrations dans une seconde.

On peut juger, d'après ces résultats, que les oscillations et vibrations qui auront lieu dans les chaînes du pont projeté seront très-lentes, et que ces chaînes sont bien éloignées de supporter des tensions semblables à celles des cordes métalliques dans les instrumens de musique; tensions qui exposent ces cordes à rompre par l'effet de quelque secousse, ou seulement par les variations de la température.

305. La question traitée dans les articles 219 et suivans a pour objet un fil ou une verge élastique, dans une situation verticale, dont l'extrémité supérieure est fixe, et dont l'extrémité inférieure est chargée d'un poids. L'expression (13), article 227, donne la quantité dont cette extrémité inférieure s'abaisse par l'effet d'une vîtesse imprimée au poids, qui est supposé fort grand par rapport au poids de la verge. L'expression (14), article 228, donne les allongemens éprouvés par chacun des élémens de la verge, exprimés en fractions de la longueur primitive de ces élémens. Ces résultats peuvent être appliqués dans plusieurs cas avec avantage. On peut s'en servir, par exemple, à se rendre compte des effets des secousses sur les cordes ou les chaînes qui servent à élever des matières dans les puits de mines; mais on ne peut en faire usage pour vérifier la solidité des tiges de suspension dans les ponts, parce qu'il est impossible de juger exactement de l'effet du choc d'une voiture sur l'extrémité inférieure d'une tige, et sur-tout parce que l'extrémité supérieure de cette tige n'est pas fixe, mais fait partie d'une chaîne flexible, qui peut céder sensiblement à l'action de ce choc. Le seul moyen que l'on ait à présent pour s'assurer que ces pièces offrent une résistance suffisante, consiste à en comparer les dimensions, et la charge qu'elles supportent, avec les dimensions et la charge des tiges dans les ponts exécutés avec succès : on pourra vérifier de cette manière que les tiges du pont projeté ont une force supérieure à celle des tiges du pont construit sur le Tweed.

On voit par la formule (12), article 227, que les durées des vibrations longitudinales, dans une verge verticale dont l'extrémité supérieure est fixe et l'extrémité infé-

rieure chargée d'un poids Π très-grand par rapport à celui de cette verge, s'obtient en posant

$$\sqrt{\frac{gE}{\Pi h}}.t = 2\pi, \text{ d'où } t = 2\pi\sqrt{\frac{\Pi h}{gE}}.$$

Dans la construction projetée, en admettant la surcharge évaluée article 285, chaque tige de suspension supporte un poids de 1860 kilogrammes, comme on l'a vu article 286. La moindre longueur de ces tiges est environ 2 mètres. L'aire de la section transversale est 1257 millimètres carrés, et par conséquent $E = 1257 \times 20000$ kilogrammes $= 25140000$ kilogrammes. En mettant cette valeur dans la formule précédente, et faisant $\Pi = 1860$ kilogrammes, $h = 2$ mètres, on trouvera $t = 0'',0244$. La véritable durée de ces vibrations, dans la construction dont il s'agit, serait plus grande que cette quantité, à raison de ce que l'extrémité supérieure de la verge n'est point fixe. On peut donc conclure de ce résultat que les tiges de suspension ne se trouvent pas dans une situation dangereuse, puisque, lors même de la plus grande surcharge à laquelle le pont puisse être exposé, le fer ne s'y trouve pas tendu de manière à faire quarante vibrations par seconde; mais on voit néanmoins que l'élasticité de ces pièces est mise en jeu d'une manière beaucoup plus énergique que celle des anneaux des chaînes, et que ce n'est pas sans raison qu'on les charge beaucoup moins, eu égard à l'aire de la section transversale (*).

§. II.

Pont-aqueduc suspendu, projeté pour un canal de grande navigation.

306. On sait qu'il existe en Angleterre plusieurs aqueducs navigables, où l'eau est contenue dans des parois en fer fondu, portées sur des arches du même métal. L'exemple de ces ouvrages ne laisse aucun doute sur la possibilité de maintenir l'eau dans des canaux de cette espèce, et, au lieu de les établir sur des arches, on peut les suspendre à des chaînes de fer forgé. Cette nouvelle espèce de ponts-aqueducs serait beaucoup moins coûteuse que les ponts-aqueducs en maçonnerie, et on pourrait

(*) Le projet du pont qui vient d'être décrit a été présenté à M. le directeur général des ponts et chaussées et des mines, avec les détails nécessaires à l'exécution, et approuvé par le conseil général des ponts et chaussées, dans sa séance du 5 juillet 1823, d'après l'avis d'une commission spéciale, composée de MM de Prony, Sganzin et Bruyère, inspecteurs généraux; Lepère et Bérigny *(rapporteur)*, inspecteurs divisionnaires. Les dispositions adoptées par le conseil sont conformes à celles indiquées dans ce paragraphe : il faut en excepter seulement les poutres transversales du plancher, qui, sur notre proposition et par des raisons de convenance et d'économie, doivent être faites en bois. La dépense de cet ouvrage, en y comprenant les travaux des abords, s'élèvera de 850000 à 900000 francs.

l'employer dans des lieux où la construction de ces derniers ouvrages deviendrait extrêmement difficile, ou même impraticable.

L'application du principe de la suspension aux aqueducs destinés aux canaux navigables, paraît plus naturelle et plus satisfaisante encore que l'application du même principe à la construction des ponts. En effet, dans ces derniers, le passage des voitures et des charges mobiles de toute espèce tend à opérer un changement de figure dans le système, par suite de la flexibilité des chaînes; on sera toujours obligé, pour que ces changemens ne dépassent point certaines limites, d'établir des relations déterminées entre le poids de ces charges, le poids de la construction même, et la courbure des chaînes. Cet inconvénient n'existe point dans les aqueducs : l'eau qui supporte les fardeaux auxquels le canal offre un passage, répartit toujours également le poids de ces fardeaux dans toute l'étendue du bief dont l'aqueduc fait partie, en sorte que, la construction ayant été mise en équilibre, les chaînes ne seront jamais sollicitées d'une manière sensible à changer de figure; le fer ne s'y trouvera exposé à aucune oscillation ou vibration. Seulement ces chaînes s'allongeront et s'accourciront en raison des variations de la température, et éprouveront des balancemens très-faibles causés par l'action du vent.

D'après le résultat exprimé par l'équation (12), article 123, les changemens de figure dus aux charges passagères sont d'autant plus grands que la flèche de la courbe des chaînes est plus grande : cette circonstance s'oppose à ce qu'on donne à cette courbe, dans les ponts, une aussi grande inflexion qu'il faudrait le faire pour rendre la dépense la moindre possible. Comme les changemens dont il s'agit ne sont point à craindre dans les aqueducs, on peut y donner à la courbe des chaînes une flèche plus grande; et cette augmentation de flèche, d'après le résultat obtenu article 194, tend à rendre moins sensibles les effets des variations de la température.

307. Les ponts-aqueducs suspendus, qui peuvent être employés très-utilement pour les canaux de grande navigation, donneront une économie plus grande encore pour les canaux de petite navigation. Les ouvrages de ce genre offriront sur-tout de grands avantages pour l'établissement des canaux d'arrosage, et des aqueducs ou rigoles destinés à rassembler les eaux aux points de partage des canaux navigables et à les conduire dans les villes. On évitera souvent, par ce moyen, de faire suivre à ces rigoles de longs contours, qui en diminuent la pente et causent des pertes d'eau. En donnant à la conduite, dans la partie suspendue seulement, une pente rapide, on pourra faire passer de grandes quantités d'eau dans des constructions très-légères et très-économiques.

Dans des cas semblables, un tuyau cylindrique ne paraît pas la disposition la plus convenable, parce que ce tuyau serait exposé à rompre, si l'eau venait à se congeler. Il vaudrait mieux probablement employer un petit canal découvert, formé

par des feuilles de zinc ou de cuivre, tel que celui dont la figure 6, planche XIII, représente la section transversale. On pourrait suspendre ce canal à deux chaînes par des étriers courbes. Nous remarquerons ici qu'en supposant à la barre ou au fil de fer dont l'étrier serait formé une grosseur uniforme, il serait convenable de régler la figure de la courbe de manière que, en vertu de la pression exercée par l'eau, la tension produite dans le sens de la longueur de l'étrier fût la même dans tous les points. Cette condition exigerait que le rayon de courbure fût, dans chaque point de cette courbe, réciproque à la hauteur de la surface de l'eau au-dessus de ce point. La courbe nommée *élastique,* qu'affecte un ressort plié, et qui a été le sujet des recherches d'Euler, offre la propriété dont il s'agit. On voit que toutes les parties de ces constructions, à raison même de la simplicité de la disposition, se trouvent réglées d'une manière exempte d'arbitraire par des lois géométriques.

308. Nous avons présenté sur la planche XIII le dessin d'un pont-aqueduc suspendu d'environ 100 mètres d'ouverture, destiné à un canal de grande navigation, afin d'appeler d'une manière plus précise l'attention des constructeurs sur les ouvrages de cette espèce. La figure 1 est l'élévation latérale; la figure 2, une partie du plan; la figure 3, une section transversale; la figure 4 représente, sur une plus grande échelle, à gauche, une section longitudinale, et à droite, une élévation latérale d'une partie de l'aqueduc située au milieu de la longueur; la figure 5 est une section transversale faite dans la même partie.

La longueur de l'aqueduc, entre les culées, est de $97^{m},5$, et la distance entre les milieux des chevalets en fer fondu qui supportent les chaînes est de 105 mètres. La flèche de la courbe des chaînes est de $9^{m},5$ pour l'ouverture de $97^{m},5$. La distance des plans verticaux passant par le milieu des chaînes est de $8^{m},5$.

309. On sait que la largeur du passage, dans les écluses de la plupart des canaux de grande navigation qui existent en France, est de 16 pieds, ou $5^{m},2$. La largeur du canal en fonte, dans lequel l'eau est contenue, est ici de $5^{m},3$ au fond, et de $5^{m},5$ à la surface supérieure. La profondeur de ce canal est de 2 mètres, et l'on suppose qu'on y entretiendrait constamment $1^{m},5$ de hauteur d'eau. Les parois sont formées par des plaques de fer fondu, de $0^{m},02$ d'épaisseur, consolidées par des côtes saillantes en dehors : dans les intervalles de ces côtes les plaques offrent une surface légèrement concave en dedans. Cette disposition tend à faire mieux résister les parois à la pression de l'eau et aux chocs des bateaux. Au moyen du talus donné aux parois latérales du canal, ces chocs, dont l'action ne peut jamais être bien puissante, ne pourraient avoir lieu qu'au bas de ces parois, et produiraient moins d'effet. Celles des côtes saillantes qui se trouvent dirigées dans le sens de la longueur du canal reçoivent des boulons et servent à assembler les plaques. Les côtes dirigées perpendiculairement à celles-ci

servent seulement de renforts : les plaques sont réunies dans ce sens par des joints à recouvrement, également assurés par des boulons. Il résulte de cette disposition que, lors des variations de la température, et en général dans toutes les circonstances où la longueur des chaînes et du canal même viendrait à varier, les joints ne tendraient nulle part à s'ouvrir ou à se serrer, et il suffirait de laisser un peu de jeu dans les trous des boulons d'assemblage, pour que la construction se prêtât sans inconvénient aux modifications dont il s'agit.

Des deux côtés du canal en fonte se trouvent deux passages de $1^{m},5$ de largeur, formés par des madriers en bois, et destinés au halage. Ces madriers sont fixés par une extrémité sur un rebord appartenant aux parois du canal, et par l'autre sur des petites poutres en fonte, qui sont supportées sur des renforts soudés aux tiges de suspension.

Ces tiges sont espacées à $1^{m},5$, et soutiennent aux extrémités inférieures des poutres en fer fondu, sur lesquelles repose le fond du canal. La figure 5 représente distinctement la construction de ces poutres, qui sont formées par un contour en ovale maintenu par des traverses verticales. Le petit diamètre extérieur de ce contour est de $0^{m},75$.

310. On a supposé les chaînes disposées de la même manière que celles du pont décrit dans le paragraphe précédent. Chacune est formée de dix cours d'anneaux. Les chaînes de retenue sont inclinées de 45°.

311. Les supports des chaînes sont formés par des chevalets en fer fondu, ayant 12 mètres de hauteur, à compter de la surface supérieure des culées, et composés chacun de quatre jambes de force, assujetties par des traverses horizontales. Des poutres transversales, également en fer fondu, réunissent les extrémités supérieures des deux chevalets placés sur chaque culée.

Nous allons indiquer succinctement les calculs nécessaires pour l'établissement de cette construction.

Calcul des dimensions des poutres transversales, des tiges et des chaînes.

312. Pour déterminer la force des chaînes, il faut connaître le poids du canal et des poutres transversales que ces chaînes auront à supporter.

Le volume d'eau que le canal peut contenir, en le supposant plein sur la profondeur de 2 mètres, est de $16^{m.cub.},2$ pour l'intervalle de $1^{m},5$ formant l'espacement des poutres, et par conséquent produit un poids de 16200 kilogrammes. Le poids des parois en fonte, avec les côtes et les rebords placés au bas des parois verticales, réuni au poids des deux planchers, est, pour le même intervalle, d'environ 3100 kilogrammes. Et ayant égard aux charges mobiles que ces planchers peuvent recevoir, nous porterons la charge totale de chaque poutre à 19500 kilogrammes.

Pour déterminer la quantité de fer fondu à employer dans cette poutre, nous remarquerons qu'en supposant un solide rectangulaire posé horizontalement sur deux appuis et chargé au milieu, le plus petit poids P qui en occasionnerait la rupture est exprimé, d'après les résultats connus, par la formule

$$P = \rho \frac{ab^2}{6c},$$

a étant la largeur du solide, b l'épaisseur, c la distance des appuis, et ρ une constante dont la valeur peut être évaluée moyennement pour le fer fondu, d'après les expériences faites en France et en Angleterre, à $\rho = 120\,000\,000$ kilogrammes, le mètre étant l'unité de longueur. Il convient d'ailleurs, dans les constructions en fer fondu, que les plus grands efforts auxquels les pièces se trouvent exposées ne dépassent point le quart de ceux qui causeraient la rupture.

D'après cela, en remarquant que la figure donnée à la poutre est telle que cette pièce résiste à très-peu près également dans toutes les parties, on voit que la résistance peut en être assimilée à celle d'un solide prismatique qui aurait pour hauteur la dimension extérieure de la poutre au milieu, moins celle d'un autre solide qui aurait pour hauteur la dimension intérieure. Par conséquent, cette dimension intérieure étant $0^m,5$, ce qui suppose $0^m,125$ de hauteur au contour de la poutre, et l'intervalle des appuis étant ici $8^m,5$, nous aurions

$$P = \rho \frac{a[(0,75)^3 - (0,5)^3]}{6.(0,75)(8,5)}$$

pour l'expression du moindre poids qui occasionnerait la rupture, si ce poids était placé au milieu de la longueur de la poutre; mais comme il est réparti à fort peu près uniformément sur une portion de cette longueur égale à $5^m,2$, on doit mettre au dénominateur, dans le second membre de l'équation précédente (ainsi qu'il est facile de s'en rendre raison), $8,5 - \frac{5,2}{2} = 6,3$, au lieu de 8,5. En faisant ensuite $P = 19\,500$ kilogrammes, et résolvant cette équation par rapport à a, on trouvera pour l'épaisseur du contour de la poutre, $a = 0^m,0155$. Ce résultat doit être quadruplé, d'après ce qui a été dit ci-dessus, et devient $0^m,062$: il devrait être encore un peu augmenté, parce que l'on n'a pas tenu compte du poids de la poutre même; mais comme, en formant le contour de cette poutre, non par une pièce rectangulaire, mais par une pièce composée d'une face horizontale et d'une côte verticale (ainsi que l'indiquent les figures 4 et 5), on en augmente la force, on peut se borner à prendre $0^m,125 \times 0^m,062 = 0^{m.\,car.},00775$ pour l'aire de la section transversale de ce contour. En y comprenant les traverses verticales, le poids de la poutre sera d'environ 1 100 kilogrammes.

313. La charge correspondant à $1^m,5$ de longueur, le canal étant supposé entièrement plein d'eau, est donc 20600 kilogrammes. Ce poids est soutenu par deux tiges; et en donnant à ces pièces $0^m,05$ de diamètre, chaque millimètre carré des sections transversales se trouvera chargé de $5^k,25$: on peut charger ici les tiges de cette manière, parce que la construction n'est pas exposée à des secousses, comme le sont les ponts. En ajoutant le poids moyen de ces tiges à la charge précédente, on trouve 20850 kilogrammes, ce qui donne, pour un mètre de longueur, 13900 kilogrammes.

314. On conclura de ce résultat la force qu'il convient de donner aux chaînes, au moyen de la formule (1), article 272,

$$\Omega = \frac{\varpi . h \sqrt{h^2 + 4f^2}}{\epsilon . 2f - \sigma . h \sqrt{h^2 + 4f^2}},$$

dans laquelle on supposera la demi-longueur du canal $h = 48^m,75$, la flèche de la courbure des chaînes $f = 9^m,5$, la charge correspondant à l'unité de longueur $\varpi = 13\,900$ kilogrammes; le poids de l'unité de volume du fer forgé dont les chaînes sont construites $\sigma = 7788$ kilogrammes, et où, en supposant que l'on fasse supporter un effort de 14 kilogrammes à chaque millimètre carré de l'aire de la section transversale des chaînes, on fera $\epsilon = 14\,000\,000$ kilogrammes. Cette formule donnera ainsi, pour l'aire de cette section tranversale, $\Omega = 0^{m.\,car.},14408$. On obtiendra cette section en donnant à chacune des quarante barres dont les chaînes sont formées $0^m,09$ de hauteur sur $0^m,04$ d'épaisseur.

Le poids des chaînes, avec les boucles d'assemblage et les traverses, sera, pour un mètre de longueur, d'environ 1300 kilogrammes. Ce poids étant ajouté à celui de la construction, on aura, pour la charge totale correspondant à cette longueur, 15200 kilogrammes. En donnant donc à p cette valeur, et à h, f, les mêmes valeurs que ci-dessus, on trouvera, pour la tension horizontale des chaînes, d'après la formule (17), article 113,

$$Q = \frac{ph^2}{2f} = 1\,901\,250 \text{ kilogrammes.}$$

315. D'après l'inclinaison que nous avons donnée aux chaînes de retenue, il est nécessaire que les chaînes soient fixées sur l'extrémité supérieure des supports. Si l'on fait abstraction de la résistance que les supports opposeraient à un effort appliqué à cette extrémité et qui tendrait à les faire fléchir dans le sens de la longueur du pont-aqueduc, la tension des chaînes de retenue doit être calculée par la formule (1), article 125, qui est

$$R = \frac{Q}{\cos.\omega}.$$

En donnant à Q la valeur précédente, et faisant $\omega = 45°$, et par conséquent $\cos.\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}$, on trouvera $R = 2\,688\,780$ kilogrammes : pour que les chaînes de retenue résistent à cette tension, on devra porter à $0^m,054$ environ l'épaisseur des barres de fer, en conservant à ces barres la hauteur de $0^m,09$.

Effets de l'extensibilité du fer.

316. Les constructions du genre de celle dont il s'agit ne sont nullement modifiées par le passage des fardeaux mobiles, comme on l'a déjà remarqué article 306; mais les chaînes peuvent avoir à supporter le canal plein d'eau, et le même canal entièrement vide. Dans les deux cas, la charge est à fort peu près répartie de la même manière, et la construction ne doit pas changer sensiblement de figure par suite de la flexibilité des chaînes; seulement la flèche de la courbe doit varier en raison de l'extension ou de l'accourcissement des fers, suivant qu'ils sont plus ou moins chargés, et il convient de reconnaître l'étendue de cette variation.

Le poids total de la construction pour un mètre de longueur, le canal étant supposé plein, est 15 200 kilogrammes, et le poids de l'eau contenue dans le canal est, pour la même longueur, de 10 800 kilogrammes : les variations de longueur des chaînes sont donc dues à une variation dans la charge, exprimée par ce dernier nombre. Nous laisserons de côté l'effet de ces variations sur les chaînes de retenue, les calculs contenus dans le paragraphe précédent indiquant suffisamment la manière dont on doit s'en rendre compte. Ces effets dépendent d'ailleurs de la longueur que l'on donnerait à ces chaînes, et ils seraient ici peu sensibles, parce que les chaînes de retenue sont fort inclinées. A l'égard des chaînes de support, l'abaissement ou l'élévation du milieu du canal, dus à l'allongement ou à l'accourcissement de ces chaînes, se calculeront à fort peu près par la formule

$$\frac{3\varpi h^4}{8Ef^3},$$

trouvée article 175; en supposant $\varpi = 10\,800$ kilogrammes, $h = 53^m,25$, $f = 11^m,25$, et $E = 20000^k \times 144000 = 2\,880\,000\,000$ kilogrammes. On trouvera ainsi, pour la quantité cherchée, $0^m,089$. Ce résultat doit être augmenté de quelques centimètres pour tenir compte de la variation de longueur des chaînes de retenue. Ainsi, quand on remplira d'eau l'aqueduc, la construction pourra fléchir au milieu de la longueur de 12 à 15 centimètres; flexion trop petite pour y causer aucune altération dangereuse (*).

(*) Pour apprécier l'altération qui peut résulter de la flexion du canal, il faut remarquer que, par l'effet de

Effets des variations de la température.

317. En supposant seulement la partie des chaînes de retenue qui est hors du terrain, soumise aux variations de la température, et admettant, comme dans le paragraphe précédent, que ces variations allongent ou accourcissent le fer d'une fraction de la longueur exprimée par 0,000 305, on aura, pour la variation de la longueur de ces chaînes, représentée par ρ dans les formules des articles 193 et suivans, $12^{m}.\sqrt{2} \times 0,000305 = 0^{m},00518$.

Le changement de température de 25° causant dans la longueur des pièces en fer fondu, d'après les résultats rapportés article 191, une variation de 0,000 278, la variation de la hauteur des supports, représentée dans les formules citées par $\mathfrak{C}$, sera $12^{m} \times 0,000\,278 = 0^{m},003\,34$.

Enfin, la demi-longueur des chaînes, comptée de l'extrémité supérieure des supports, étant de $54^{m},79$, la variation de cette longueur, représentée par γ, sera $54^{m},79 \times 0,000\,305 = 0^{m},0167$.

D'après cela, on aura d'abord, par la formule (1), article 193, pour le déplacement horizontal de l'extrémité supérieure des supports

$$n = \frac{\rho}{\cos.\omega} - \mathfrak{C} \text{ tang. } \omega = 0^{m},00398,$$

en donnant à ρ et $\mathfrak{C}$ les valeurs précédentes, et en faisant $\omega = 45°$.

On trouvera ensuite, pour la variation de la flèche de courbure des chaînes, ou pour la quantité dont le milieu du canal devra s'abaisser ou s'élever, d'après la formule (2), article 194,

$$\frac{3h}{4f}\gamma + \frac{3c}{4f\cos.\omega}\rho - \left(\frac{3c \text{ tang. } \omega}{4f} + 1\right)\mathfrak{C} = 0^{m},07,$$

en calculant pour la courbe comprise entre les extrémités supérieures des supports,

---

cette flexion, les arêtes verticales contiguës des pièces des parois, qui sont toutes parallèles et verticales tant que ce canal est dirigé en ligne droite, s'inclinent les unes par rapport aux autres quand il prend une courbure; ce qui oblige ces pièces à se comprimer en haut et à se dilater en bas, si le milieu du canal s'abaisse, ou à se dilater en haut et à se comprimer en bas, si le milieu du canal s'élève. Si ces compressions et dilatations n'ont pas lieu, les pièces devront glisser un peu les unes sur les autres dans les joints. Soit φ la flèche de la courbe affectée par le canal; cette courbe étant à très-peu près parabolique, le rayon de courbure au sommet, qui est le plus petit de tous, est exprimé par $\frac{h^2}{2\varphi}$. En nommant a la longueur d'une des pièces des parois du canal, et b la hauteur de ce canal, la quantité du glissement aux extrémités supérieure et inférieure des joints verticaux sera exprimée par $\frac{ab}{2} \cdot \frac{2\varphi}{h^2}$, ou $\frac{ab.\varphi}{h^2}$. On a, dans la construction projetée, $a = 3$ mètres, $b = 2$ mètres, $h = 48^{m},75$.

c'est-à-dire en faisant $h = 52^m,5$, $f = 11^m,25$ et $c = 54^m,79$. On voit donc que les changemens de figure dont il s'agit sont fort petits, quoique l'étendue de la construction soit assez considérable, et ne peuvent donner lieu à aucune inquiétude.

La variation de longueur du canal en fer fondu, sur l'étendue de $97^m,5$, est de $0^m,027$; et cette variation, répartie sur trente-deux joints, donne pour chacun $0^m,000847$. Il est donc nécessaire que, dans les joints à recouvrement, les pièces puissent glisser les unes sur les autres à peu près de cette quantité.

318. Nous terminons ici la tâche que nous nous étions imposée dans la rédaction de ce Mémoire : faire connaître les ponts suspendus exécutés en Amérique et en Angleterre, et donner sur la construction de ces ouvrages tous les détails que nous avons pu rassembler; exposer les notions, fondées sur l'expérience et le calcul, d'après lesquelles on doit en faire l'établissement, et s'assurer qu'ils présenteront une fermeté et une rigidité suffisantes; offrir enfin de nouveaux exemples des combinaisons de ce genre, et, par des applications numériques des formules, en rendre l'usage plus facile, et les faire adopter avec plus de confiance.

Nous avons cherché plutôt à présenter des faits et des calculs que des jugemens; le lecteur appréciera lui-même chacun des ouvrages que nous avons décrits, et vérifiera la justesse des règles que nous avons présentées. Le nouveau genre de construction qui fait l'objet de ce Mémoire, nous paraît une acquisition importante pour les arts, et nous croyons que l'on doit en attendre de grands services pour l'établissement des communications. Les recherches précédentes jetteront beaucoup de lumière sur les applications que l'on en pourra faire; elles permettront de présenter à l'appui de chaque projet les calculs propres à le faire apprécier. La nécessité absolue de suppléer dans cette occasion par le calcul au défaut des exemples, et l'utilité que l'on en retirera, engageront peut-être à user plus fréquemment d'une ressource aussi précieuse, et à laquelle il est indispensable d'avoir recours, toutes les fois que les constructions s'éloignent des formes et des proportions habituelles.

Si l'on trouve de l'utilité dans la rédaction et la publication de ces recherches, la reconnaissance en sera due à la libéralité d'une administration éclairée, et à la nature des institutions françaises, d'après lesquelles chaque ingénieur s'empresse de faire jouir le public des lumières qu'il a acquises, et de soumettre les résultats de ses travaux au jugement de ses collègues.

FIN DU MÉMOIRE SUR LES PONTS SUSPENDUS.

EXPÉRIENCES

SUR LA RÉSISTANCE DU FER,

EXTRAITES DE L'OUVRAGE DE M. BARLOW

INTITULÉ: *AN ESSAY ON THE STRENGTH AND STRESS OF TIMBER*, London, 1817.

1.° *Expériences sur la résistance directe et transversale du fil de fer de diverses longueurs et divers diamètres, par M. T. Telford.*

CES expériences ont été faites dans la vue d'obtenir des données pour la formation du projet du pont de Runcorn, sur la Mersey (*voyez* ci-dessus, articles 23, 30, 33). L'appareil dont on s'est servi est représenté fig. 35, pl. XI. *RS*, *TV* sont deux supports sur lesquels le fil est étendu; *QS*, un autre poteau sur lequel passe le fil, et dont l'inclinaison est telle, que la direction de ce poteau coïncide avec celle de la résultante des tensions horizontales et verticales, afin d'empêcher qu'il n'y ait aucun effort exercé sur le poteau *RS*.

A, *B*, *C*, *D* sont les points où l'on plaçait les poids dont le fil était chargé. *C* est au milieu et *B*, *D* à un quart de la longueur, à compter de chaque extrémité. Les abaissemens au-dessous de la ligne horizontale *RT* ont été mesurés à ces points, après que les différens poids ont été placés.

(Avant d'entrer dans le détail des expériences, nous remarquerons que M. Barlow (*) a présenté une comparaison de quelques-uns des résultats qu'elles ont fourni avec ceux que l'on déduirait par le calcul de la théorie, qui n'est pas fort satisfaisante, la plupart des nombres trouvés par l'auteur différant considérablement entre eux, suivant le procédé de calcul qu'il emploie, et s'écartant sensiblement des nombres donnés par l'expérience. Ce prétendu défaut de conformité entre la théorie et l'observation ne paraît pas pouvoir être attribué à la cause indiquée par M. Barlow; mais je crois que l'on en trouverait une explication plus naturelle, en remarquant que ce professeur établit toujours ses calculs sur les propriétés du polygone funiculaire, en regardant les parties des fils comprises entre les points de suspension des poids comme des verges rectilignes. Cependant ces fils, très-flexibles, se courbent nécessairement d'un point à l'autre, et l'inclinaison des élémens extrêmes de chaque portion de courbe suivant laquelle la tension est dirigée, diffère sensiblement de l'inclinaison des lignes droites qui joignent les points de suspension et forment la corde des portions de courbe tracées par le fil. Il paraît indispensable d'avoir égard à cette flexion des parties des fils, pour appliquer convenablement le calcul aux expériences dont il s'agit; et l'on y parviendrait facilement au moyen des résultats présentés dans le paragraphe II de la deuxième partie de ce Mémoire.)

1.re EXPÉRIENCE.

Distance des poteaux, 100 pieds; poids de cent pieds de fil, 29 onces $\frac{1}{2}$; diamètre, un peu plus

(*) *An Essay on the strength and stress of timber*, pag. 238.

de $\frac{6}{70}$ de pouce. Ce fil, suspendu verticalement, a rompu, par une moyenne entre divers essais, sous un effort de 531 livres.

POIDS en *A*, comprenant le fil *QA*.	POIDS PLACÉS EN			ABAISSEMENS EN			OBSERVATIONS.
	B.	*C.*	*D.*	*B.*	*C.*	*D.*	
Liv. Onc.	Liv. Onc.	Liv. Onc.	Liv. Onc.	Pi. Po.	Pi. Po.	Pi. Po.	
5. 6 $\frac{1}{2}$.	0. 0.	0. 0.	0. 0.	″	4. 10.	″	Les abaissemens à *B* et *D* n'ont pas été mesurés.
10. 5.	0. 0.	0. 0.	0. 0.	″	2. 11 $\frac{1}{2}$.	″	
30. 5 $\frac{1}{2}$.	0. 0.	0. 0.	0. 0.	″	0. 10 $\frac{1}{2}$.	″	
Idem.	0. 0.	1. 0 $\frac{1}{2}$.	0. 0.	″	1. 8.	″	
Idem.	0. 0.	2. 0 $\frac{1}{4}$.	0. 0.	″	2. 7.	″	
Idem.	0. 0.	5. 0 $\frac{1}{2}$.	0. 0.	″	4. 11.	″	Les poids en *C* ant enlevés, l'abaissement devint 11 pouces.
176. 0.	5. 0.	30. 4.	5. 0.	2. 1.	4. 6 $\frac{1}{2}$.	2. 1.	
Idem.	9. 0.	30. 4.	5. 0.	2. 5 $\frac{1}{2}$.	4. 10 $\frac{1}{2}$.	2. 2 $\frac{1}{2}$.	Le poids en *A* a été élevé de 1 pouce.
226. 0.	9. 0.	56. 0.	5. 0.	3. 11.	7. 10 $\frac{1}{2}$.	3. 7 $\frac{1}{2}$.	
286. 0.	9. 0.	56. 0.	5. 0.	2. 8 $\frac{3}{4}$.	5. 11 $\frac{1}{2}$.	2. 6 $\frac{1}{2}$.	
342. 0.	9. 0.	56. 0.	5. 0.	2. 3 $\frac{1}{2}$.	5. 0 $\frac{1}{4}$.	2. 1 $\frac{3}{4}$.	
Idem.	9. 0.	66. 0.	5. 0.	2. 5.	5. 4 $\frac{1}{2}$.	2. 3 $\frac{1}{4}$.	
Idem.	9. 0.	72. 0.	5. 0.	2. 7.	5. 9 $\frac{1}{2}$.	2. 5 $\frac{1}{4}$.	
Idem.	9. 0.	77. 0.	5. 0.	2. 7.	5. 10.	2. 5 $\frac{1}{4}$.	
Idem.	9. 0.	81. 0.	5. 0.	2. 9 $\frac{3}{4}$.	6. 4 $\frac{3}{4}$.	2. 8.	
Idem.	9. 0.	87. 0.	5. 0.	2. 10 $\frac{1}{4}$.	6. 6 $\frac{1}{4}$.	2. 8 $\frac{1}{2}$.	
Idem.	15. 0.	71. 0.	15. 0.	2. 11 $\frac{1}{4}$.	6. 3 $\frac{3}{4}$.	2. 11 $\frac{1}{4}$.	
402. 0.	15. 0.	71. 0.	15. 0.	2. 8 $\frac{1}{4}$.	5. 8 $\frac{3}{4}$.	2. 8 $\frac{1}{4}$.	
402. 0.	30. 0.	56. 0.	30. 0.	″	″	″	Le fil a rompu, après avoir soutenu ces poids pendant un peu de temps.

2.ᵉ EXPÉRIENCE.

Distance des poteaux, 31 pieds 6 pouces; le même fil employé dans la première expérience, mais qui n'avait pas encore servi. Les deux extrémités du fil ont été fixées, après qu'on l'eut tendu autant qu'il était possible, c'est-à-dire, de manière que la flèche de la courbe était moindre que $\frac{1}{8}$ de pouce. Les poids ont été placés au milieu seulement.

EXTRÉMITÉS *R* et *T* fixées.	POIDS PLACÉS EN			ABAISSEMENS EN			OBSERVATIONS.
	B.	*C.*	*D.*	*B.*	*C.*	*D.*	
		Livres.			Pi. Po.		
Fixé.	0.	10 $\frac{1}{4}$.	0.	″	0. 2,83.	″	
	0.	20 $\frac{1}{4}$.	0.	″	0. 5,5.	″	
	0.	30 $\frac{1}{4}$.	0.	″	0. 7,75.	″	
	0.	40 $\frac{1}{4}$.	0.	″	0. 10.	″	
	0.	50 $\frac{1}{4}$.	0.	″	1. 0.	″	
	0.	60 $\frac{1}{4}$.	0.	″	1. 1,75.	″	
	0.	70 $\frac{1}{4}$.	0.	″	1. 3,5.	″	
	0.	80 $\frac{1}{4}$.	0.	″	1. 5.	″	
	0.	90 $\frac{1}{4}$.	0.	″	1. 6,5.	″	
	0.	100 $\frac{1}{4}$.	0.	″	1. 8.	″	
	0.	110 $\frac{1}{4}$.	0.	″	1. 9,75.	″	
	0.	120 $\frac{1}{4}$.	0.	″	1. 10,75.	″	
	0.	130 $\frac{1}{2}$.	0.	″	″	″	Rompu, immédiatement après avoir supporté ce dernier poids.

3.[e] EXPÉRIENCE.

Distance des poteaux, 100 pieds; diamètre, $\frac{1}{10}$ de pouce; poids de cent pieds, 2 livres 9 onces. Le fil a supporté verticalement 736 livres, mais a rompu sous 738 livres.

POIDS placés en *A*.	POIDS PLACÉS EN *B*.	POIDS PLACÉS EN *C*.	POIDS PLACÉS EN *D*.	ABAISSEMENS EN *B*.	ABAISSEMENS EN *C*.	ABAISSEMENS EN *D*.	*OBSERVATIONS.*
Livres.	Livres.	Livres.	Livres.	Pi. Po.	Pi. Po.	Pi. Po.	
362.	0.	0.	0.	"	0. 5.	"	
362.	30.	15.	30.	2. 2.	2. 11 $\frac{1}{4}$.	2. 1 $\frac{1}{4}$.	
362.	35.	30.	35.	2. 8.	3. 10 $\frac{1}{8}$.	2. 7 $\frac{1}{4}$.	
362.	40.	35.	40.	2. 11 $\frac{4}{10}$.	4. 3 $\frac{1}{2}$.	2. 10 $\frac{1}{2}$.	
362.	40.	41.	40.	3. 3.	4. 11.	3. 2 $\frac{1}{4}$.	
468.	56.	41.	56.	3. 4 $\frac{6}{10}$.	4. 9 $\frac{4}{10}$.	3. 4 $\frac{7}{10}$.	
498.	56.	41.	56.	3. 0 $\frac{4}{10}$.	4. 3 $\frac{6}{10}$.	3. 0 $\frac{6}{10}$.	
558.	61.	41.	61.	3. 1 $\frac{1}{2}$.	4. 4 $\frac{1}{4}$.	3. 1 $\frac{1}{4}$.	
608.	76.	76.	76.	3. 5 $\frac{9}{10}$.	5. 3 $\frac{1}{10}$.	3. 6 $\frac{1}{2}$.	Fixé le fil en *A*.
Fixé.	56.	56.	56.	3. 0.	4. 6 $\frac{7}{10}$.	2. 11 $\frac{1}{2}$.	
	71.	68.	71.	3. 3 $\frac{8}{10}$.	5. 0.	3. 4.	Fixé de nouveau le fil.
	71.	68.	71.	3. 4 $\frac{7}{10}$.	5. 1 $\frac{1}{10}$.	3. 4 $\frac{7}{10}$.	
	77.	74.	77.	3. 6 $\frac{1}{10}$.	5. 4 $\frac{8}{10}$.	3. 6 $\frac{8}{10}$.	Fixé de nouveau le fil.
	77.	74.	77.	3. 3 $\frac{7}{10}$.	4. 11 $\frac{8}{10}$.	3. 3 $\frac{1}{10}$.	Le fil a supporté ces poids; mais en essayant d'ajouter 4 livres aux poids placés en *B*, *D*, le fil a rompu.

4.[e] EXPÉRIENCE.

Le même fil employé dans l'expérience précédente. Distance des poteaux, 31 pieds 6 pouces.

POIDS placés en *A*.	POIDS PLACÉS EN *B*.	POIDS PLACÉS EN *C*.	POIDS PLACÉS EN *D*.	ABAISSEMENS EN *B*.	ABAISSEMENS EN *C*.	ABAISSEMENS EN *D*.	*OBSERVATIONS.*
	Livres.	Livres.	Livres.	Pi. Po.	Pi. Po.	Pi. Po.	
Fixé.	0.	0.	0.	"	0. 0 $\frac{1}{8}$.	"	Les deux extrémités sont fixées.
	40.	41.	40.	0. 7 $\frac{1}{8}$.	0. 10 $\frac{7}{8}$.	0. 7 $\frac{1}{2}$.	
	44.	47.	44.	0. 8 $\frac{1}{2}$.	1. 0 $\frac{1}{8}$.	0. 8 $\frac{1}{2}$.	
	50.	47.	50.	0. 9.	1. 0 $\frac{5}{8}$.	0. 9.	
	56.	47.	56.	0. 9 $\frac{1}{4}$.	1. 1 $\frac{1}{4}$.	0. 9 $\frac{1}{2}$.	
	56.	53.	56.	0. 10 $\frac{1}{8}$.	1. 2.	0. 9 $\frac{3}{4}$.	
	61.	53.	61.	0. 10 $\frac{1}{2}$.	1. 2 $\frac{3}{8}$.	0. 10 $\frac{1}{4}$.	
	61.	59.	61.	0. 10 $\frac{3}{4}$.	1. 3 $\frac{1}{8}$.	0. 10 $\frac{3}{4}$.	
	67.	68.	67.	1. 0.	1. 4 $\frac{1}{8}$.	0. 11 $\frac{5}{8}$.	
	71.	68.	71.	1. 0.	1. 4 $\frac{7}{8}$.	1. 0.	
	71.	76.	71.	1. 0 $\frac{1}{2}$.	1. 5 $\frac{1}{8}$.	1. 0 $\frac{1}{4}$.	Ces derniers poids étant restés en place pendant quelques minutes, le fil a rompu.

5.e EXPÉRIENCE.

Distance des poteaux, 100 pieds; diamètre, $\frac{6}{100}$ de pouce; poids de cent pieds, 16 onces $\frac{1}{2}$. Le fil a supporté verticalement, pendant quelques minutes, 277 livres, et ensuite a rompu.

POIDS placés en *A.*	POIDS PLACÉS EN *B.*	*C.*	*D.*	ABAISSEMENS EN *B.*	*C.*	*D.*	*OBSERVATIONS.*
Livres.	Livres.	Livres.	Livres.	Pi. Po.	Pi. Po.	Pi. Po.	
180.	0.	0.	0.	0. 1 $\frac{3}{4}$.	0. 1 $\frac{1}{4}$.	0. 1 $\frac{1}{4}$.	
180.	6.	5.	6.	1. 0 $\frac{7}{8}$.	1. 5 $\frac{1}{2}$.	0. 11 $\frac{3}{4}$.	
180.	12.	10.	12.	1. 10 $\frac{1}{8}$.	2. 7 $\frac{1}{4}$.	1. 9 $\frac{1}{2}$.	
210.	16.	14.	16.	2. 3 $\frac{1}{2}$.	3. 2 $\frac{1}{2}$.	2. 2.	
248.	16.	14.	16.	2. 2 $\frac{5}{8}$.	3. 2 $\frac{1}{2}$.	2. 2 $\frac{1}{4}$.	Ôté le poids en *A*, et tendu le fil.
Fixé.	16.	14.	16.	1. 9 $\frac{5}{8}$.	2. 7 $\frac{1}{4}$.	1. 9 $\frac{1}{4}$.	On a rompu le fil, en essayant de le tendre davantage.
			Autre pièce du même fil.				
Fixé.	0.	0.	0.	0. 2 $\frac{3}{4}$.	0. 4.	0. 3 $\frac{1}{4}$.	
	16.	15.	16.	2. 4.	3. 5.	2. 4 $\frac{7}{8}$.	
	22.	19.	22.	2. 7 $\frac{1}{2}$.	3. 10.	2 8 $\frac{8}{10}$.	En essayant de porter ces poids à 25, 26 et 25 livres, le fil a rompu dans un endroit où il y avait un défaut.

6.e EXPÉRIENCE.

Le même fil employé dans l'expérience précédente. Distance des poteaux, 31 pieds 6 pouces.

POIDS placés en *A.*	POIDS PLACÉS EN *B.*	*C.*	*D.*	ABAISSEMENS EN *B.*	*C.*	*D.*	*OBSERVATIONS.*
	Livres.	Livres.	Livres.	Pi. Po.	Pi. Po.	Pi. Po.	
Fixé.	22.	30.	22.	0. 11 $\frac{1}{2}$.	1. 6.	0. 10 $\frac{7}{8}$.	
	28.	30.	28.	0. 1 $\frac{1}{4}$.	1. 6 $\frac{1}{2}$.	1. 0 $\frac{5}{8}$.	
	30.	30.	30.	1. 1 $\frac{1}{2}$.	1. 6 $\frac{1}{2}$.	1. 1 $\frac{1}{8}$.	
	30.	35.	30.	1. 1 $\frac{1}{2}$.	1. 7 $\frac{5}{8}$.	1. 1 $\frac{1}{8}$.	Le fil a rompu, quand on a essayé d'ajouter 4 livres en *B* et *D.*

7.e EXPÉRIENCE.

Distance des poteaux, 140 pieds; diamètre, $\frac{1}{21}$ de pouce; poids de cent quarante pieds, 14 onces. Le fil a rompu verticalement sous 157 livres.

POIDS placés en *A*.	POIDS PLACÉS EN *B*.	*C*.	*D*.	ABAISSEMENS EN *B*.	*C*.	*D*.	*OBSERVATIONS.*
Livres.	Livres.	Livres.	Livres.	Pi. Po.	Pi. Po.	Pi. Po.	
120.	0.	0.	0.	0. 1 $\frac{1}{2}$.	0. 1 $\frac{1}{8}$.	0. 1 $\frac{1}{3}$.	
120.	6.	5.	6.	2. 8.	3. 5 $\frac{3}{10}$.	2. 7 $\frac{1}{4}$.	
120.	12.	10.	12.	4. 8 $\frac{3}{10}$.	6. 4 $\frac{1}{2}$.	4. 7 $\frac{7}{10}$.	
120.	15.	20.	15.	7. 1 $\frac{1}{2}$.	10. 0.	7. 0 $\frac{3}{4}$.	
132.	15.	20.	15.	6. 3 $\frac{1}{4}$.	8. 9 $\frac{1}{2}$.	6. 4 $\frac{1}{2}$.	
132.	21.	25.	21.	8. 8 $\frac{1}{2}$.	11. 11.	8. 7.	
150.	21.	25.	21.	7. 11 $\frac{1}{2}$.	10. 10.	7. 0.	
150.	25.	25.	25.	8. 3.	10. 11.	2. 8.	Rompu.

8.e EXPÉRIENCE.

Le même fil que dans la dernière expérience. Distance des poteaux, 31 pieds 6 pouces.

POIDS placé en *A*	POIDS PLACÉS EN *B*.	*C*.	*D*.	ABAISSEMENS EN *B*.	*C*.	*D*.	*OBSERVATIONS.*
	Livres.	Livres.	Livres.	Pi. Po.	Pi. Po.	Pi. Po.	
Fixé.	0.	0.	0.	0. 5 $\frac{1}{2}$.	0. 5 $\frac{1}{4}$.	0. 4 $\frac{1}{2}$.	
	6.	5.	6.	1. 1 $\frac{3}{4}$.	1. 4 $\frac{1}{4}$.	1. 1 $\frac{1}{2}$.	
	12.	10.	12.	1. 4 $\frac{3}{4}$.	1. 8.	1. 3 $\frac{1}{4}$.	
	16.	15.	16.	1. 6 $\frac{1}{4}$.	1. 10 $\frac{1}{2}$.	1. 4 $\frac{7}{8}$.	
	20.	20.	20.	1. 7 $\frac{1}{2}$.	2. 1.	1. 6 $\frac{3}{8}$.	Rompu, en essayant d'ajouter 2 livres en *B*, 4 livres en *C*, et 2 livres en *D*.

9.e EXPÉRIENCE.

Le même fil que dans l'expérience précédente, et les poteaux placés à la même distance, c'est-à-dire, à 31 pieds 6 pouces.

POIDS placés en *A*.	POIDS PLACÉS EN *B*.	POIDS PLACÉS EN *C*.	POIDS PLACÉS EN *D*.	ABAISSEMENS EN *B*.	ABAISSEMENS EN *C*.	ABAISSEMENS EN *D*.	*OBSERVATIONS.*
Livres.	Livres.	Livres.	Livres.	Pi. Po.	Pi. Po.	Pi. Po.	
120.	20.	30.	20.	2. 6.	3. 3 $\frac{1}{2}$.	2. 2 $\frac{1}{4}$.	
120,	25.	30.	20.	2. 9 $\frac{1}{4}$.	3. 7.	2. 5.	
120.	31.	34.	31.	3. 5 $\frac{4}{10}$.	4. 4 $\frac{1}{2}$.	2. 11 $\frac{1}{2}$.	
120.	34.	34.	34.	3. 6 $\frac{3}{4}$.	4. 5 $\frac{1}{2}$.	3. 1 $\frac{1}{4}$.	
120.	34.	42.	34.	3. 9 $\frac{3}{4}$.	4. 11 $\frac{1}{4}$.	3. 2 $\frac{3}{4}$.	
120.	34.	50.	34.	4. 0.	5. 3 $\frac{3}{4}$.	3. 4.	
150.	34.	50.	34.	3. 3 $\frac{6}{10}$.	4 4 $\frac{1}{2}$.	2. 9 $\frac{8}{10}$.	
150.	34.	55.	34.	3. 6 $\frac{1}{4}$.	4. 8 $\frac{1}{2}$.	3. 0.	
150.	37.	55.	37.	3. 9 $\frac{4}{10}$.	5. 0.	3. 2 $\frac{1}{2}$.	
150.	37.	56.	37.	3. 9 $\frac{1}{4}$.	5. 0.	3. 2 $\frac{1}{2}$.	
156.	37.	56.	37.	3. 9 $\frac{1}{4}$.	5. 0.	3. 2 $\frac{1}{2}$.	
160.	39.	57.	39.	3. 9 $\frac{2}{10}$.	5. 0 $\frac{2}{10}$.	3. 2 $\frac{2}{10}$.	Rompu, en essayant d'ajouter 6 livres de plus.

Les expériences précédentes ont été faites à la manufacture des câbles en fer de MM. Brunton et compagnie.

10.e EXPÉRIENCE.

Distance des poteaux, 900 pieds; diamètre du fil, $\frac{1}{10}$ de pouce; poids de neuf cents pieds, 28 livres par la balance romaine; poids de cent pieds, par la balance ordinaire, 3 livres 3 onces $\frac{1}{2}$. Force verticale moyenne, d'après neuf expériences, 630 livres.

POIDS placés en *A*.	POIDS PLACÉS EN *B*.	POIDS PLACÉS EN *C*.	POIDS PLACÉS EN *D*.	DISTANCE du point *C* au sol.	*OBSERVATIONS.*
	Livres.	Livres.	Livres.	Pi. Po.	
Fixé.	0.	0.	0.	15. 6.	A raison de la longueur du fil, la flexion a été mesurée à partir du sol, qui se trouvait à environ 22 pieds au-dessous de la ligne horizontale joignant les points de suspension.
	28.	14.	28.	4. 0 $\frac{1}{2}$.	
	28.	17.	28.	3. 4.	
	28.	19.	28.	3. 0.	
	28.	20.	28.	2. 10.	
	28.	21.	28.	2. 5 $\frac{1}{2}$.	
	28.	22.	28.	2. 4.	Enlevé les poids, et retendu le fil.
	0.	0.	0.	16. 8.	
	28.	0.	28.	9. 1.	
	28.	14.	28.	4. 8.	
	28.	17.	28.	"	Le fil a rompu, non dans un joint.

Cette expérience a été faite à Ellesmère. Les points de suspension étaient placés, l'un à un bâtiment, l'autre à un arbre.

Les neuf expériences dont la force verticale moyenne de 630 livres a été déduite, sont comme il suit :

Dans la 1.re, le fil a rompu sous 616 livres.
——— 2.e.................. 616.
——— 3.e.................. 620.
——— 4.e.................. 652.
——— 5.e.................. 616.
——— 6.e.................. 637.
——— 7.e.................. 616.
——— 8.e.................. 646.
——— 9.e.................. 651.

Le fil a rompu dans ces expériences dans des joints ou dans des endroits défectueux.

La moyenne de douze autres expériences, sur des fils du même diamètre, mais de différens échantillons, a été de 634 livres.

2.e *Expériences sur les chocs que des fils, tendus comme dans les expériences précédentes, peuvent supporter avant d'être rompus.*

1.re Expérience. Une pièce de fil de fer, qui soutenait verticalement 277 livres, a été tendue entre deux poteaux dont la distance était de 140 pieds, jusqu'à ce que la flèche de la courbure au milieu fût seulement de 4 pouces $\frac{1}{4}$.

Un poids de 5 livres fut alors attaché à une corde, dont l'autre extrémité était arrêtée au milieu du fil : la longueur de cette corde, entre le poids et le fil, était de 10 pieds 6 pouces. Le poids ayant été élevé au niveau du fil, on le laissa tomber, et il frappa la terre sans endommager le fil.

La corde ayant été accourcie à 7 pieds 7 pouces, et le même essai ayant été fait, le poids ne frappa point la terre, et n'endommagea pas le fil.

La longueur de la corde étant la même, et un poids de 10 livres étant substitué au poids de 5 livres, ce poids frappa le sol, mais ne rompit pas le fil.

Mais le même poids ayant été attaché par une corde de 6 pieds 7 pouces, et laissé tomber, comme ci-dessus, rompit le fil à un joint.

La distance du milieu du fil au sol était de 13 pieds 6 pouces.

2.e Expérience. Distance des poteaux, 31 pieds 6 pouces; diamètre du fil, $\frac{1}{10}$ de pouce; tendu avec une flèche de courbure plus petite que $\frac{1}{8}$ de pouce.

Un poids de 10 livres ayant été attaché au milieu du fil par une corde de 7 pieds 9 pouces de longueur, fut élevé au niveau du fil, comme dans l'expérience précédente, et laissé tomber : il ne rompit point le fil.

Un poids de 15 livres, attaché et laissé tomber de la même manière, ne rompit point le fil.

On essaya alors un poids de 20 livres : il ne rompit pas le fil.

Un poids de 25 livres, tombant de la même hauteur, rompit le fil.

3.° Expériences sur la force de cohésion du fer forgé, faites par M. T. Telford à la fabrique de câbles en fer de MM. Brunton, au moyen d'une presse hydraulique construite par M. Fuller.

1.re Expérience. Barre cylindrique de fer de South Wales, fabriquée par S. Homfrey. 5 avril 1814.

Longueur de la barre, avant l'expérience	2 pieds	2 $\frac{3}{4}$ pouces.
——— après	2	6 $\frac{7}{8}$.
Diamètre, avant l'expérience	0	1 $\frac{3}{8}$.
——— après	0	1 $\frac{1}{8}$.

Rompue par 43 tonnes 11 quintaux.

2.e Expérience. Barre cylindrique de fer de South Wales, fabriquée par S. Homfrey. 5 avril 1814.

Longueur de la barre, avant l'expérience	2 pieds	3 $\frac{3}{8}$ pouces.
——— après	2	6 $\frac{5}{8}$.
Diamètre, avant l'expérience	0	1 $\frac{1}{2}$.
——— après	0	1 $\frac{1}{4}$.

Rompue par 52 tonnes 15 quintaux 1 *quarter* 10 livres.
Temps, 34 minutes.

3.e Expérience. Barre carrée de fer de Staffordshire. 17 mai 1814.

Longueur de la barre, avant l'expérience	1 pied	5 $\frac{1}{8}$ pouces.
——— après	1	11 $\frac{1}{4}$.
Côté du carré, avant l'expérience	0	0 $\frac{3}{4}$.
——— après	0	0 $\frac{6}{10}$.

Commença à s'étendre sous 12 tonnes; rompit sous 15 tonnes 5 quintaux 3 *quarters* 4 livres.
Temps, 9 minutes $\frac{1}{4}$.

4.e Expérience. Barre carrée de fer de Staffordshire. 17 mai 1814.

Longueur de la barre, avant l'expérience	1 pied	7 $\frac{1}{4}$ pouces.
——— après	1	9 $\frac{1}{4}$.
Côté du carré, avant l'expérience	0	1 $\frac{1}{12}$.
——— après	0	0 $\frac{5}{6}$.

Commença à s'étendre sous 32 tonnes; rompit sous 32 tonnes 6 quintaux 4 livres.
Temps, 16 minutes.

5.e Expérience. Barre de fer de Welsh, d'un pouce carré. 5 mai 1817.

S'étendit sous 18 tonnes de	0 $\frac{1}{4}$ pouce.
——— 21	0 $\frac{1}{2}$.
——— 23	0 $\frac{3}{4}$.
——— 25	1.
——— 27	2 $\frac{1}{4}$.
——— 29	2 $\frac{3}{8}$. Rompit sous ce poids.

6.e Expérience. Barre de fer de Suède, d'un pouce carré. 5 mai 1817.

Commença à s'étendre sous.............	17	tonnes.
S'étendit sous........................	20	tonnes de $\frac{1}{10}$ de pouce.
————————	27	$\frac{3}{8}$.
Rompit sous...........................	29	tonnes à un endroit défectueux.

N. B. Les extensions indiquées ci-dessus, aussi bien que les suivantes, ont été mesurées sur une longueur de 12 pouces, marquée au milieu de la barre.

7.e Expérience. Barre d'un pouce carré fabriquée avec des morceaux de vieux fer soudés ensemble, par M. Howard de Rotherhithe. 5 mai 1817.

Commença à s'étendre sous.............	16	tonnes.
S'étendit sous........................	20	tonnes de $\frac{3}{8}$ de pouce.
————————	25	$\frac{3}{4}$.
————————	28	$2\frac{3}{8}$.
Rompit sous...........................	29	tonnes.

Une barre semblable commença à s'étendre sous 18 tonnes, et rompit comme la précédente sous 29 tonnes.

8.e Expérience. Barre de fer commun de Staffordshire, d'un pouce carré. 5 mai 1817.

Commença à s'étendre sous.............	19	tonnes.
S'étendit sous........................	24	tonnes de $\frac{1}{2}$ pouce.
————————	28	$\frac{5}{8}$.
————————	29	$\frac{5}{8}$.
————————	30	1.
Rompit sous...........................	31	tonnes.

9.e Expérience. Barre de fer commun, de 2 pouces de diamètre. 21 mai 1817.

Commença à s'étendre sous	45	tonnes	d'environ $\frac{1}{10}$ de pouce sur 12, au milieu de la barre. La machine ayant été relâchée, la barre s'accourcit de $\frac{1}{40}$ de pouce.
S'étendit sous...........	50	tonnes	de 0^{po},125. La machine ayant été relâchée, la barre s'accourcit comme ci-dessus.
————————	55		0, 25. *Idem.*
————————	60		0, 26.
————————	70		0, 375. S'accourcit très-peu quand la machine fut relâchée.
————————	75		0, 544. *Idem.*
————————	80,1		0, 75. Le diamètre est réduit à 1 pouce $\frac{1}{16}$.
————————	85		0, 86. Aucun changement sensible.
————————	90		1, 00. *Idem.*
————————	95		1, 35. Le diamètre est réduit à 1 pouce $\frac{7}{8}$.
————————	100		2, 2. Le diamètre est presque réduit à 1 pouce $\frac{1}{2}$.

Sous ce dernier poids, la barre donna des signes évidens de rupture, et, après quelques minutes, céda graduellement.

N. B. La longueur totale de la barre précédente était de 2 pieds; elle s'étendit en totalité de 2 pouces $\frac{7}{8}$, sur

lesquels 2 pouces $\frac{1}{2}$ répondaient à 12 pouces dans le milieu de la barre. La durée totale de cette expérience fut de 3 heures, et elle fut faite avec le plus grand soin.

La machine a été fréquemment relâchée, et, lorsque la tension était exercée de nouveau, elle indiquait le même poids qu'auparavant, sans jamais l'excéder, ce qui est une preuve d'exactitude.

C'est un fait curieux, et qui mérite l'attention des philosophes, que fréquemment, au moment de la rupture, la barre acquiert un tel degré de chaleur dans la partie rompue, qu'une personne ne peut tenir cette barre serrée dans la main sans éprouver une sensation de brûlure douloureuse.

Réduction des expériences précédentes à un pouce carré.

La 1.re expérience, réduite à un pouce carré, donne...	29 tonnes	6 quintaux.	Welsh.
2.e	29	16.	*Idem.*
3.e	27	3.	Staffordshire.
4.e	27	10.	*Idem.*
5.e	29	0.	Welsh.
6.e	29	0.	Suède.
7.e	29	0.	Fabriqué.
8.e	31	0.	Staffordshire.
9.e	31	16.	
Force moyenne d'une barre d'un pouce carré.........	29 tonnes	5 $\frac{2}{3}$ quintaux.	

En comparant ce résultat moyen à celui que l'on déduit des expériences suivantes faites par le capitaine Brown, on trouve une différence considérable qu'il importe d'expliquer, et qui me paraît devoir être attribuée à la nature des deux machines; la première exagérant l'action exercée, et la seconde la diminuant. La machine de MM. Brunton est une presse hydraulique, dans laquelle, pour de grandes pressions, il est nécessaire qu'il s'exerce un frottement considérable entre le cuir du piston et le cylindre, et la puissance de la machine surmonte à-la-fois la résistance et ce frottement; par conséquent, si l'on estime le tout comme répondant à la résistance seule, l'effort est évalué trop haut. Dans la machine du capitaine Brown, le cas est tout-à-fait contraire; le frottement et l'inertie tendent également à faire estimer l'effort apparent trop petit.

4.° *Expériences sur des barres et des câbles de fer, faites à la manufacture de câbles du capitaine S. Brown, à Mill-Wall, avec une machine disposée sur le principe des ponts à bascule ; d'après un rapport communiqué à M. Barlow, par le capitaine S. Brown.* 28 mai 1817.

Expériences sur des fers de diverses espèces.

1.re Expérience. Une barre de fer de Suède, de 3 pieds 6 pouces de longueur, 1 pouce $\frac{1}{16}$ en carré, exigea un effort de 40 tonnes 19 quintaux pour être rompue en la tirant en ligne droite. Elle s'étendit,

pendant l'opération, de $\frac{3}{16}$ de pouce. Aucune altération sensible dans l'aspect général de la barre, sauf à l'endroit de la rupture, où la grosseur fut réduite à 1 pouce $\frac{1}{16}$.

Le grain était très-petit et serré, de couleur gris-blanchâtre. Elle ne s'échauffa point pendant l'opération.

2.e *Expérience.* Une autre pièce de la même barre, de 3 pieds 6 pouces de longueur, exigea un effort de 39 tonnes 15 quintaux. Elle s'étendit de $\frac{3}{4}$ de pouce, la barre étant rompue en éclats *[torn into cracks]* en plusieurs endroits. Elle se réduisit à $\frac{3}{16}$ de pouce à l'endroit de la rupture. Le grain très-fin et serré, comme ci-dessus, mêlé de quelques traces de fibres.

Couleur gris-blanchâtre. Ne s'échauffa point à l'instant de la rupture.

3.e *Expérience.* Barre de fer de Suède, de 3 pieds 6 pouces de longueur (marquée différemment), 1 pouce $\frac{3}{16}$ en carré, exigea un effort de 33 tonnes 10 quintaux. Le fer était extrêmement doux et ductile, la barre s'étant étendue de 3 pouces dans l'opération, et s'étant réduite à l'endroit de la rupture à $\frac{7}{8}$ de pouce. Rupture très-fibreuse et sans grain. Couleur argentée. S'échauffa beaucoup à l'endroit de la rupture.

4.e *Expérience.* Un barreau de vieux fer noir de Russie, marqué CCN, de 3 pieds 6 pouces de longueur, 1 pouce $\frac{5}{16}$ de diamètre, exigea un effort de 36 tonnes 2 quintaux. Ce fer, très-doux et ductile, s'étendit de 2 pouces $\frac{1}{4}$, et se réduisit à 1 pouce de diamètre à l'endroit de la rupture. Il parut à l'endroit de la rupture en forme d'écharpe, comme s'il avait été coupé avec des ciseaux, la surface si unie, qu'il n'y avait aucune apparence de fibres ou de grain. La qualité fibreuse du fer était toutefois suffisamment indiquée par l'apparence générale du barreau.

5.e *Expérience.* Une barre de fer de Welsh, nommée numéro 3, de 3 pieds 6 pouces de longueur, 1 pouce $\frac{3}{4}$ en carré, exigea un effort de 38 tonnes 1 quintal. Ce fer était très-ductile, mais diminua de diamètre plus graduellement que dans les deux expériences précédentes. Il s'étendit de 2 pouces, et se réduisit, à l'endroit de la rupture, à 1 pouce $\frac{3}{16}$. La couleur de ce fer, en regardant perpendiculairement à la surface de rupture, était un bleu sombre; et, en le tenant horizontalement à la lumière, et regardant obliquement, il paraissait brillant et fibreux, mais non si blanc ou argentin que le fer étranger. S'échauffa beaucoup à l'endroit de la rupture.

6.e *Expérience.* Une barre de fer commun de Welsh, de 3 pieds 6 pouces de longueur, 1 pouce $\frac{1}{8}$ en carré, exigea un effort de 31 tonnes. Cette barre était peu ductile, et ne subit aucun changement dans l'opération. Elle rompit directement au travers, et la grosseur, à l'endroit de la rupture, fut de 1 pouce $\frac{1}{16}$. Le grain de ce fer était très-fin et extrêmement serré, semblable à celui de l'acier, et ne montrait aucune fibre. La couleur et la texture semblaient contredire les règles générales d'après lesquelles on juge la qualité du fer. La mesure de la force a été prise toutefois très-exactement.

7.e *Expérience,* très-intéressante. Un barreau de fer de Welsh, nommé n.° 3, de 12 pieds 6 pouces de longueur, 2 pouces de diamètre, exigea pour être rompu un effort de 82 tonnes 15 quintaux. Lorsqu'il fut soumis à un effort de 68 tonnes, il s'étendit de 3 pouces et se réduisit à 1 pouce $\frac{15}{16}$ de diamètre. Quand l'effort fut porté à 74 tonnes 15 quintaux, il s'étendit de 6 pouces, et le diamètre diminua graduellement de $\frac{1}{8}$ de pouce. Sous 82 tonnes, il s'étendit de 14 pouces. Sous 82 tonnes 15 quintaux, le barreau rompit à environ 5 pieds de l'extrémité, les leviers étant exactement balancés. Il s'est étendu pendant toute l'opération de 18 pouces $\frac{1}{2}$, et avait à l'endroit de la rupture 1 pouce $\frac{5}{8}$ de diamètre.

8.e *Expérience.* Un barreau d'acier *[blistered steel]* fait à Sheffield, de 1 pouce $\frac{1}{4}$ en carré, 3 pieds 6 pouces de longueur, exigea un effort de 23 tonnes pour être rompu. Il n'éprouva aucun changement dans l'opération, mais rompit directement en travers. Le grain était gros, anguleux et brillant. Ne diminua point de grosseur à l'endroit de la rupture, et ne s'échauffa point.

9.e *Expérience.* Une barre d'acier fondu, de 1 pouce $\frac{5}{16}$ en carré, 3 pieds 6 pouces de longueur, exigea un effort de 48 tonnes 10 quintaux pour être rompu. Cette barre n'éprouva aucun changement apparent, ne s'allongea point et ne diminua point de grosseur dans l'opération. La rupture était exactement transversale, le grain serré, et la couleur d'un gris sombre.

10.e *Expérience.* Une barre de fer fondu, de gueuse de Welsh, 1 pouce $\frac{1}{4}$ en carré, 3 pieds 6 pouces de longueur, exigea un effort de 11 tonnes 7 quintaux : fracture exactement transversale; aucune diminution de grosseur; tout-à-fait froide à l'instant de la rupture; grain fin; couleur gris bleu sombre.

Signé Sam. Brown.

11.e *Expérience.* Un barreau de fer de Welsh, 1 pouce $\frac{4}{9}$ de diamètre, 5 pieds de longueur, fut rompu par un effort de 43 tonnes $\frac{1}{2}$.

Sous 28 tonnes, le diamètre fut réduit à 1,4 pouce.

35........................ 1,35.

40........................ 1,30.

Sous 43 tonnes, le barreau rompit, après s'être allongé pendant l'opération de 7 pouces. Il s'échauffa beaucoup à l'endroit de la rupture.

Cette expérience est la seule à laquelle M. Barlow ait assisté.

Réduction des expériences précédentes à un pouce carré.

Expérience	1.re Fer de Suède	23,77	tonnes.
	2.e *Idem*	23,19.	
	3.e *Idem*	23,75.	
	4.e Fer de Russie	26,55.	
	5.e Fer de Welsh	24,35.	
	6.e *Idem*	24,90.	
	7.e *Idem*	26,33.	
	8.e Acier	14,72.	
	9.e Acier fondu	27,92.	
	10.e Fer fondu, gueuse de Welsh	7,26.	
	11.e Fer de Welsh	26,34.	

Moyenne des sept premières et de la onzième.................... 25.

La moyenne des expériences de M. Telford est.................. 29 $\frac{1}{4}$.

Et la moyenne des deux .... 27 tonnes environ, qui peuvent être prises avec sûreté pour la force moyenne d'une barre d'un pouce carré; d'autant plus que ce résultat s'accorde, ainsi que je l'apprends, avec les résultats d'expériences semblables faites par M. Rennie avec une machine différente (*).

(*) La grande difficulté de produire des efforts aussi considérables peut donner lieu à quelque inexactitude

5.° Expériences sur la force des chaînes formées avec diverses espèces de fers anglais et étrangers, travaillés de nouveau, faites le 2 septembre 1816.

		Tonnes.	Quintaux.
1 pouce $\frac{1}{2}$....	Vieux fer noir *[old sable]*, barreaux carrés de 1 pouce $\frac{1}{2}$, coupés en pièces de 2 pieds, battues et roulées en barres de 1 pouce $\frac{1}{2}$....	73.	10.
1 pouce $\frac{1}{2}$....	*Idem*..	80.	00.
1 pouce $\frac{1}{2}$....	Nouveau fer noir *[new sable]* de Gurcoft, *idem*...............	71.	00.
1 pouce $\frac{1}{2}$....	Barreaux d'un pouce carré, de Keiolsken, Archangel, coupés en pièces de 2 pieds, battues et roulées en barres.............	71.	00.
1 pouce $\frac{1}{2}$....	Vieux fers trouvés, mélangés, battus et soudés au marteau dans mes établissemens......................................	71.	10.
1 pouce $\frac{1}{2}$ plein.	Barres anglaises battues et roulées.........................	86.	00.
1 pouce $\frac{1}{2}$ juste.	*Idem*..	80.	00.

Autres expériences faites le 13 septembre 1816.

1 pouce $\frac{1}{2}$....	Vieux barreaux hollandais, soudés au marteau dans mes établissemens.	71.	00.
1 pouce $\frac{1}{2}$....	Fer de Welsh, n.° 1, de $\frac{5}{8}$ de pouce en carré, travaillé au marteau en loupes *[blooms]*, et roulé en barres aux établissemens de King-and-Queen..	78.	10.
1 pouce $\frac{1}{2}$....	Fer de Welsh, n.° 2, de $\frac{1}{4}$ de pouce en carré, travaillé comme ci-dessus..	73.	05.
1 pouce $\frac{1}{2}$....	Fer de Welsh, n.° 4, soudé au marteau dans mes établissemens..	88.	10.
1 pouce $\frac{1}{2}$....	Fer de Welsh, n.° 6, de $\frac{5}{8}$ de pouce en carré, roulé, mais non travaillé au marteau, aux établissemens de King-and-Queen..........	76.	00.
1 pouce $\frac{1}{2}$....	Fer fabriqué avec de vieux fers, des mêmes établissemens.......	80.	05.

Les anneaux de ces chaînes étaient de forme ovale, de 6 pouces de largeur intérieure *[6 inches in the clear]*.

Signé S. Brown.

FIN DES EXPÉRIENCES EXTRAITES DE L'OUVRAGE DE M. BARLOW.

Expériences inscrites sur un registre dans l'établissement du capitaine Brown, et communiquées à M. Navier.

1. Une barre de fer forgé, de 1 pouce $\frac{1}{2}$ de diamètre et 7 pieds 4 pouces $\frac{1}{4}$ de longueur, s'est étendue, sous 33 tonnes $\frac{1}{2}$, de 1 pouce $\frac{3}{4}$, et le diamètre a diminué de $\frac{1}{10}$ de pouce; sous 42 tonnes $\frac{1}{2}$,

dans l'estimation de la puissance; et il me paraît très-probable, comme je l'ai déjà dit, que, tandis que la machine du capitaine Brown indique moins que la véritable force, celle de M. Brunton en indique davantage. Toutes deux sont très-ingénieuses; mais, dans la dernière, le rapport entre la puissance et le poids est très-grand, chaque livre dans le plateau répondant à un effort de plus de 16 000 livres; et dans la première l'inertie est immense, et par conséquent difficile à estimer avec exactitude.

elle s'est étendue de 3 pouces, et le diamètre a diminué de $\frac{1}{16}$ de pouce de plus. Elle a rompu sous 47 tonnes $\frac{1}{2}$, après s'être allongée en tout de 13 pouces $\frac{3}{8}$: le diamètre a diminué à l'endroit de la rupture de $\frac{3}{8}$ de pouce.

2. Trois barreaux en fer fondu, de 1 pouce $\frac{1}{4}$ en carré, ont rompu sous 11 $\frac{1}{4}$, 14 et 16 tonnes. Un autre barreau d'un pouce en carré a rompu sous 11 tonnes $\frac{1}{2}$.

Expériences faites par M. Brunel, communiquées à M. Navier.

Ces expériences ont été faites dans l'établissement de Milton, près Sheffield, sur le meilleur fer du Yorkshire. Les barreaux ont été réduits au marteau à une grosseur d'environ $\frac{3}{8}$ de pouce. Les résultats des expériences sont ramenés par le calcul à une section d'un pouce anglais carré.

	POIDS sous lequel le fer commence à s'étendre.		POIDS sous lequel le fer se rompt.	
	Tonnes.	Quintaux.	Tonnes.	Quintaux.
1.re expérience	28.	16.	35.	12.
2.e	27.	4.	36.	4.
3.e	24.	16.	32.	16.
4.e	27.	16.	33.	10.
5.e	22.	15.	31.	14.
6.e	25.	8.	31.	15.
7.e	22.	3.	31.	9.
8.e	21.	9.	29.	6.
9.e	23.	9.	31.	7.
10.e	21.	9.	30.	7.
Moyenne	24.	11.	32.	8.

Les expériences suivantes ont été faites sur du fer de seconde qualité du Yorkshire.

1.re expérience	21.	0.	29.	8.
2.e	24.	0.	32.	0.
3.e	18.	15.	25.	0.
4.e	22.	0.	34.	19.
5.e	20.	0.	34.	6.
6.e	20.	0.	28.	2.
7.e	23.	2.	28.	2.
8.e	24.	0.	31.	6.
9.e	26.	9.	32.	10.
10.e	23.	1.	28.	12.
Moyenne	22.	4.	30.	8.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

FIN DE LA TABLE.







